

• Esercizio 6.4(ii).

Dimostriamo che $X \setminus D(S)$ è aperto.

Per definizione, $x \in D(S)$ se e solo se $x \in \overline{S \setminus \{x\}}$, cioè per ogni intorno aperto U di x esiste un $y \in S \cap U$, $y \neq x$. Quindi $x \in X \setminus D(S)$ se e solo se $x \notin D(S)$, cioè se e solo se esiste un intorno aperto U di x tale che $S \cap U \subseteq \{x\}$ (cioè $S \cap U = \{x\}$ oppure $S \cap U = \emptyset$).

Per dimostrare che $X \setminus D(S)$ è aperto basta dimostrare che per ogni $x \in X \setminus D(S)$ c'è un aperto U tale che $x \in U \subseteq X \setminus D(S)$. Per quanto detto sopra, per ogni $x \in X \setminus D(S)$ c'è un aperto U tale che $x \in U$ e $S \cap U \subseteq \{x\}$.

Dimostro che per questo U si ha che $U \subseteq X \setminus D(S)$. Infatti, sia $y \in U$. Se $y = x$, allora per ipotesi $x \in X \setminus D(S)$. Se $y \neq x$, allora, siccome X è T_1 , esiste un aperto V tale che $y \in V$ e $x \notin V$. Ma allora $U \cap V$ è un aperto (perché intersezione di due aperti), $y \in U \cap V$ e $S \cap (U \cap V) = (S \cap U) \cap V \subseteq \{x\} \cap V = \emptyset$, poiché $x \notin V$. Da $y \in U \cap V$ aperto, e $S \cap (U \cap V) = \emptyset$ ottengo che $y \in X \setminus D(S)$. Ho quindi dimostrato che, se $y \in U$, allora $y \in X \setminus D(S)$, cioè $U \subseteq X \setminus D(S)$.

Ho dimostrato che per ogni $x \in X \setminus D(S)$ c'è un aperto U tale che $x \in U \subseteq X \setminus D(S)$, e quindi $X \setminus D(S)$ è aperto, cioè $D(S)$ è chiuso.

P.S.: L'esercizio 6.4(i)(ii) sarebbe vero anche senza l'ipotesi che X è T_1 ? (provate a considerare $\mathbb{R}$ con la topologia i cui aperti sono il vuoto, $\mathbb{R}$ stesso e le semirette del tipo (a, ∞))

• Esercizio 7.5.

a) Si può pensare ad $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ come l'unione (disgiunta) di tutte le semirette che partono dall'origine (esclusa). Ogni punto di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è determinato univocamente dalla sua distanza dall'origine, e dall'intersezione con S^{n-1} della semiretta che lo contiene. Si ottiene così un omeomorfismo fra $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ (nel caso $n = 2$ questa è la corrispondenza che trasforma coordinate cartesiane in coordinate polari, considerando gli angoli modulo 2π , altrimenti vi sarebbero delle discontinuità). Siccome $\mathbb{R}^+$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$, si ottiene un omeomorfismo fra $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $S^{n-1} \times \mathbb{R}$.

In dettaglio, considerate la funzione $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ data da

$$f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, |\mathbf{x}| \right) = \left(\frac{x_1}{|\mathbf{x}|}, \dots, \frac{x_n}{|\mathbf{x}|}, |\mathbf{x}| \right)$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ è un vettore di $\mathbb{R}^n$, e $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ (notare che f è ben definita, visto che 0 è escluso dal dominio, e notare che le prime n coordinate di $f(x)$ stanno effettivamente in S^{n-1} , e che l'ultima coordinata sta effettivamente in $\mathbb{R}^+$).

Considerate anche la funzione $g: S^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ data da

$$g(\mathbf{y}, r) = r\mathbf{y} = (ry_1, \dots, ry_n)$$

Le funzioni f e g sono continue (si sa dall'analisi), e sono una l'inversa dell'altra (verificare!), quindi biettive e omeomorfismi.

Siccome $\mathbb{R}^+$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$, allora anche $S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ e $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ sono omeomorfi, in conclusione, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ sono omeomorfi.

b) Usare la funzione f che ad un punto P di $S^{n-1} \setminus \{N, S\}$ associa l'intersezione con $S^{n-2} \times \mathbb{R}$ della semiretta che parte dall'origine e passa per P .

Analiticamente, f è definita da:

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}}, \dots, \frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}}, \frac{x_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}} \right)$$

L'inversa è g da $S^{n-2} \times \mathbb{R}$ a $S^{n-1} \setminus \{N, S\}$ definita da

$$g(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}}, \dots, \frac{y_n}{\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}} \right)$$

Verificare che siano ben definite, che dominio e codominio siano appropriati, che siano una l'inversa dell'altra nei domini e codomini indicati... Per esempio, se $(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}$, allora

$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$, quindi, se $y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}}, \dots, y_n = \frac{x_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}}$, allora $y_1^2 + \dots + y_n^2 = \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2} = \frac{1}{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$, quindi $\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} = \dots$

Viceversa, se $(y_1, \dots, y_n) \in S^{n-2} \times \mathbb{R}$, allora $y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 = 1 \dots$

Alternativamente, se per caso aveste fatto a lezione che $S^{n-1} \setminus \{N\}$ è omeomorfo ad $\mathbb{R}^{n-1}$ (un omeomorfismo è quello che manda un punto P di $S^{n-1} \setminus \{N\}$ nell'intersezione con $\mathbb{R}^{n-1}$ della retta che passa per P e N), allora, in questo omeomorfismo, ad S corrisponde $\mathbf{0}$. Siccome, in generale, se X e Y sono omeomorfi, $\phi : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo, e $A \subseteq X$, allora A e $\phi(A)$ sono ancora omeomorfi, abbiamo, in questo caso particolare, che $S^{n-1} \setminus \{N, S\}$ è omeomorfo ad $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, ma quest'ultimo è omeomorfo a $S^{n-2} \times \mathbb{R}$ per la parte a), quindi, poiché la relazione di essere isomorfi è transitiva, $S^{n-1} \setminus \{N, S\}$ è omeomorfo ad $S^{n-2} \times \mathbb{R}$.

Scrivetemi se di qualcosa non siete convinti! (potrei essere io ad aver sbagliato, nessuno è infallibile!)