Esercizio 15(2)f e irrazionalità di $\cos\theta$

(da controllare)

• Siano $\rho = e^{\frac{\pi i}{7}} = \cos\frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$, e $\alpha = 2\cos\frac{\pi}{7}$.

Siccome $\frac{\pi}{7} = \frac{2\pi}{14}$, ρ è una radice primitiva 14^a dell'unità, cioè $\rho^{14} = 1$, e ogni altro numero complesso z tale che $z^{14} = 1$ è del tipo ρ^n, per qualche n. Geometricamente, i numeri complessi ρ^n sono rappresentati dai vertici di un 14-agono regolare inscritto in una circonferenza di raggio 1 con centro nell'origine (naturalmente, ci si può limitare a considerare $n = 0, \ldots, 13$).

Si ha $\rho\rho^{13} = \rho^{14} = 1$, quindi $\rho^{13} = \rho^{-1}$, cioè $\rho^{-1} = e^{-\frac{\pi i}{7}} = \cos\frac{\pi}{7} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}$. Quindi $\alpha = 2\cos\frac{\pi}{7} = \rho + \rho^{13} = \rho + \rho^{-1}$.

Scomponendo in fattori il polinomio $x^{14} - 1$ su $\mathbb{Q}$, si ottiene $x^{14} - 1 = (x^7 - 1)(x^7 + 1) = (x - 1)(x^6 + \cdots + 1)(x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$.

ρ è quindi radice di $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, perchè radice di $x^{14} - 1$, e non è radice degli altri fattori.

• Date queste premesse, possiamo verificare che $\alpha = \rho + \rho^{-1}$ è effettivamente radice di $x^3 - x^2 - 2x + 1$.

Innanzitutto, $\rho^{-1} = -\rho^6$, quindi $\alpha = \rho - \rho^6$.

Calcoliamo ora $\alpha^2 = (\rho + \rho^{-1})^2 = \rho^2 + 2\rho\rho^{-1} + \rho^{-2} = \rho^2 + 2 - \rho^5$.

Allo stesso modo si trova che $\alpha^3 = (\rho + \rho^{-1})^2 = \rho^3 - \rho^4 + 3\rho - 3\rho^6$.

Si ha quindi che $\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha + 1 = \rho^3 - \rho^4 + 3\rho - 3\rho^6 - \rho^2 - 2 + \rho^5 - 2\rho + 2\rho^6 + 1 = -(\rho^6 - \rho^5 + \rho^4 - \rho^3 + \rho^2 - \rho + 1) = 0$.

• Allo stesso modo si può verificare che $\alpha_2 = \rho^3 - \rho^4$ e $\alpha_3 = -\rho^2 + \rho^5$ sono le altre due radici reali di $x^3 - x^2 - 2x + 1$ (in realtà, non c'è bisogno di questa verifica per i motivi che verranno spiegati più sotto).

(Nota: un altro modo per effettuare simultaneamente tutte le verifiche è quello di controllare che $-(\alpha+\alpha_2+\alpha_3)$, $\alpha\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3$ e $-\alpha\alpha_1\alpha_2$ sono i coefficenti di grado 2, 1, 0, rispettivamente, del polinomio $x^3 - x^2 - 2x + 1$.)

Siccome, per i calcoli precedenti, si ha che $\alpha_3 = -\alpha^2 + 2$, allora $\alpha_3 \in \mathbb{Q}(\alpha)$, quindi anche $\alpha_2 = 1 - \alpha - \alpha_3 \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

Il campo di spezzamento di $x^3 - x^2 - 2x + 1$ su $\mathbb{Q}$ è quindi $\mathbb{Q}(\alpha)$. Il suo grado è ≤ 3, poiché α è radice di un polinomio di grado 3. Il grado è effettivamente 3, poichè il polinomio minimo di α è irriducibile su $\mathbb{Q}$. Infatti, ha grado 3 e non ha radici in $\mathbb{Q}$ (le radici le abbiamo determinate, e non sono numeri razionali, altrimenti l'ettagono regolare sarebbe costruibile. Oppure vedi più sotto).

• Potrebbe apparire alquanto misterioso il motivo per cui $\alpha_2 = \rho^3 - \rho^4$ e $\alpha_3 = -\rho^2 + \rho^5$ sono le altre radici di $x^3 - x^2 - 2x + 1$. In realtà, conoscendo un po' di teoria, questa è la parte più semplice!

Lavoriamo in $Q(\rho)$. Quindi $\alpha = \rho + \rho^{-1} \in \mathbb{Q}(\rho)$. Sia $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio a coefficienti razionali di cui α sia radice. Sappiamo che ogni automorfismo di $\mathbb{Q}(\rho)$ manda una radice di $p(x)$ in una radice di $p(x)$. Un automorfismo ϕ di $\mathbb{Q}(\rho)$ è determinato dall'immagine di ρ secondo ϕ. Naturalmente, $\phi(\rho)$ deve essere radice del polinomio $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, di cui ρ è radice. Quindi le possibilità per $\phi(\rho)$ sono ρ, ρ^3, ρ^5 ρ^9, ρ^{11} ρ^{13}.

Provate ora a calcolare $\phi(\alpha)$ secondo ciascuno di questi automorfismi...

Per inciso, ciascuna delle possibilità induce effettivamente un automorfismo di $\mathbb{Q}(\rho)$, perchè $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ è un polinomio irriducibile su $\mathbb{Q}$. (è un polinomio ciclotomico, e si sa dalla teoria che i polinomi ciclotomici sono irriducibili. In questo caso, si può dimostrare che è irriducibile ponendo $y = -x$).

• Discutiamo adesso in generale quando $\cos\theta$ è un numero razionale.

Sia θ un angolo qualunque, e sia $\rho = e^{\theta i} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, e $\alpha = 2\cos\theta = \rho + \rho^{-1}$. Dunque $\alpha \in \mathbb{Q}(\rho)$, e ρ è radice del polinomio $x^2 - \alpha x + 1 \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Questo significa che $[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}(\alpha)] \leq 2$. Quindi $[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \leq 2[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.

Quindi, se $[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}] > 2$, allora necessariamente $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] > 1$, cioè $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Se, in particolare, ρ è una radice primitiva n-sima, quali sono i valori per cui $[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}] \leq 2$? Per tutti gli altri valori, comunque, $\cos\theta$ non è razionale!

Scrivetemi se di qualcosa non siete convinti! (potrei essere io ad aver sbagliato, nessuno e' infallibile!)