DA "DAVIS-HERSH, L'ESPERIENZA MATEMATICA" p. 30-38

Tracceremo il ritratto del "matematico ideale", non intendendo con questo termine il matematico perfetto, quello senza difetti e limiti. Vogliamo invece descrivere il matematico più simile a un matematico, come descriveremmo il purosangue ideale o il monaco ideale del Duecento. Cercheremo di costruire un esemplare puro sino all'impossibile per porre in rilievo gli aspetti paradossali e problematici del ruolo del matematico. In particolare, vogliamo mettere chiaramente in luce la discrepanza tra l'effettivo lavoro e l'effettiva attività del matematico e la percezione che egli ne ha.

Il lavoro del matematico ideale è intelligibile solo ad un gruppetto di specialisti che va da qualche dozzina ad un massimo di alcune centinaia. Questo gruppo esiste solo da alcuni decenni e ci sono buone probabilità che in altrettanti pochi decenni si estingua. Ciò nonostante il matematico considera il proprio lavoro parte integrante della struttura del mondo e le sue verità come verità valide per sempre, dall'inizio dei tempi, sin nel più remoto angolo dell'universo.

Fonda questa sua fede sul rigore delle dimostrazioni; crede che la differenza tra una dimostrazione corretta ed una scorretta sia una differenza inequivocabile e decisiva. Non riesce ad immaginare condanna più drastica che dire di uno studente: "Non sa nemmeno che cos'è una dimostrazione". Eppure non è in grado di dare una spiegazione coerente di che cosa è il rigore né di quali requisiti debba avere una dimostrazione per essere rigorosa. Nel suo lavoro, la linea di demarcazione tra dimostrazioni complete ed incomplete è sempre un po' sfumata e spesso controversa.

Per parlare del matematico ideale dobbiamo dare un nome al suo "campo", alla sua materia. Diciamo, per esempio, che si occupa degli "iperquadrati non riemanniani". Egli viene così etichettato dal suo campo, da quanto pubblica, dalle opere che usa e dal gusto delle persone che segue nella scelta dei problemi.

Studia oggetti la cui esistenza è a tutti ignota, se si eccettua un gruppetto di colleghi. Tanto è vero che se un profano gli chiede di che si occupa è incapace di spiegarglielo. È necessario affrontare un duro apprendistato di parecchi anni per capire la teoria cui si è dedicato. Solo allora la mente sarebbe preparata a ricevere la sua spiegazione sull'oggetto dei suoi studi. In mancanza di questo, otterremmo in risposta una "definizione" così recondita da frustrare ogni tentativo di capirla.

Gli oggetti che il nostro matematico studia erano sconosciuti prima del ventesimo secolo; più probabilmente, lo erano persino trent'anni fa. Oggi costituiscono l'interesse vitale di alcune dozzine (o al massimo alcune centinaia) di colleghi. Lui ed i suoi colleghi,

comunque, non nutrono dubbi sul fatto che gli iperquadrati non riemanniani abbiano una esistenza reale, definita ed oggettiva, come la Rocca di Gibilterra o la cometa di Halley. Tant'è vero che una delle loro conquiste più notevoli è la dimostrazione dell'esistenza degli iperquadrati non riemanniani mentre l'esistenza della Rocca di Gibilterra è molto probabile ma non è rigorosamente dimostrata.

Non gli è mai venuto in mente di domandarsi che cosa significa in questo caso la parola "esiste". Si potrebbe cercare di scoprirne il significato guardandolo lavorare e osservando che cosa significa operativamente la parola "esiste".

In ogni caso, per lui gli iperquadrati non riemanniani esistono e li insegue con devozione appassionata. Passa tutte le sue giornate a contemplarli. La sua vita ha successo nella misura in cui riesce a scoprire nuovi fatti che li riguardano.

Trova difficile avere uno scambio di idee significativo con quella larga parte dell'umanità che non ha mai sentito parlare degli iperquadrati non riemanniani. Questo gli crea gravi difficoltà; ci sono due colleghi nel suo dipartimento che sanno qualcosa sugli iperquadrati non riemanniani ma uno è in congedo e l'altro è molto più interessato ai semianelli non euleriani. Segue conferenze e d'estate va a trovare colleghi per incontrare persone che parlano il suo linguaggio, sanno apprezzare il suo lavoro e il cui riconoscimento, la cui stima e ammirazione, sono l'unica ricompensa significativa cui può aspirare.

Alle conferenze l'argomento principale è di norma "il problema della decisione" (o magari "il problema della costruzione" o "il problema della classificazione") per gli iperquadrati non riemanniani. Il problema è stato posto per la prima volta dal professor Senzanome, il fondatore della teoria degli iperquadrati non riemanniani. È importante perché il professor Senzanome lo ha posto e ne ha dato una soluzione parziale che, disgraziatamente, nessuno oltre a lui stesso è stato in grado di capire. Da quel giorno tutti i migliori studiosi di iperquadrati non riemanniani hanno lavorato sul problema ottenendo molti risultati parziali. Così il problema ha acquisito grande prestigio.

Il nostro eroe sogna spesso di averlo risolto. Per due volte si è convinto, sveglio nel suo letto, di averlo risolto ma, entrambe le volte, altri appassionati degli iperquadrati non riemanniani hanno scoperto una lacuna nel ragionamento ed il problema rimane aperto. Nel frattempo continua a scoprire nuovi fatti interessanti sugli iperquadrati non riemanniani. Ai suoi compagni esperti in materia comunica questi risultati in modo conciso e noncurante. "Applicando un mollificatore tangenziale alla quasi-martingala sinistra ottieni una stima migliore di quella quadratica, così la convergenza nel teorema di Bergstein risulta dello stesso ordine del grado di approssimazione nel teorema di Steinberg".

Questo stile spigliato non si ritrova nelle sue pubblicazioni. Qui accumula formalismo su formalismo. A tre pagine di definizioni fanno seguito sette lemmi e infine un teorema per formulare le cui ipotesi occorre mezza pagina mentre la dimostrazione si riduce essenzialmente a "Applicare i lemmi 1-7 alle definizioni A-H".

Il suo modo di scrivere segue una convenzione ferrea: nascondere ogni traccia del fatto che l'autore o il possibile lettore sia un essere umano. Si ha l'impressione che i risultati desiderati seguano in modo infallibile dalle definizioni poste, con procedimento puramente meccanico. In realtà, non è mai stato costruito un calcolatore che possa accettare come input le sue definizioni. Per leggere le sue dimostrazioni, occorre essere al corrente di un'intera subcultura di motivazioni, esempi, argomenti standard e modi di pensiero convenzionalmente accettati. I lettori designati (tutti e dodici) sono in grado di decodificare la presentazione formale, scoprire la nuova idea celata nel lemma 4, ignorare i calcoli di routine e privi di interesse dei lemmi 1, 2, 3, 5, 6, 7 e capire che cosa fa l'autore e perché lo fa. Ma per il profano è una scrittura in codice che non svelerà mai il suo segreto. Se (Dio non voglia) la confraternita degli studiosi degli iperquadrati non riemanniani un giorno si estinguesse gli scritti del nostro eroe diverrebbero ancora più intraducibili di quelli dei Maya.

Le difficoltà di comunicazione sono emerse chiaramente il giorno in cui il matematico ideale ha ricevuto la visita di un Funzionario dell'Università.

F.U. Le sono grato per aver accettato di parlarmi. La matematica è sempre stata la mia bestia nera.

M.I. Si capisce. Lei ha il suo lavoro da fare.

F.U. Sono stato incaricato di redigere un comunicato stampa a proposito del rinnovo del suo fondo di ricerca. La formula usuale consisterebbe di una sola frase: "Il professor *X* ha ricevuto un finanziamento di *Y* dollari per continuare le sue ricerche sul problema della decisione per gli iperquadrati non riemanniani". Ma ho pensato che sarebbe stato stimolante per me cercare di dare un'idea alla gente di quello che realmente lei fa. Per cominciare, che cos'è un iperquadrato?

M.I. Mi ripugna dirlo, ma la verità è che se le dicessi che cosa è penserebbe che cerco di umiliarla e di farla sentire stupido. La definizione è davvero alquanto tecnica e non significherebbe niente per la maggior parte della gente.

F.U. Si tratta di qualcosa che interessa fisici ed ingegneri?

M.I. No. Beh, forse ad alcuni fisici teorici. Pochissimi.

F.U. Anche se non può darmi la definizione esatta, può darmi qualche idea della natura e dello scopo generale del suo lavoro?

M.I. Bene, ci proverò. Consideri una funzione liscia f su uno spazio

di misura Ω a valori in un fascio di germi dotato di una struttura di convergenza di tipo saturo. Nel caso più semplice...

F.U. Forse non mi sono spiegato. Può dirmi qualche cosa sulle applicazioni della sua ricerca?

M.I. Applicazioni?

F.U. Sì, applicazioni.

M.I. Mi hanno detto che in fisica nucleare sono stati fatti tentativi per applicare gli iperquadrati non riemanniani come modelli delle particelle elementari. Non so se si è ottenuto qualcosa.

F.U. Recentemente ci sono stati risultati decisivi nel suo campo? Risultati nuovi ed eccitanti di cui la gente parla?

M.I. Certo, c'è il lavoro di Steinberg-Bergstein. È il più grosso passo avanti degli ultimi cinque anni.

F.U. Che cosa hanno fatto?

M.I. Non sono in grado di spiegarlo.

F.U. Capisco. Pensa che la ricerca nel suo campo riceva aiuti adeguati?

M.I. Adeguati? Promesse, non più di tanto. Alcuni dei giovani migliori che lavorano in questo campo non hanno avuto sovvenzioni. Non ho il minimo dubbio che se avessimo maggiori finanziamenti potremmo fare progressi più rapidi sul problema della decisione.

F.U. In ogni caso, pensa che il lavoro nel suo campo possa portare a qualcosa di comprensibile per il cittadino medio di questo paese?

M.I. No.

F.U. E tra gli ingegneri e gli scienziati?

M.I. Ho seri dubbi.

F.U. Tra i matematici puri, la maggioranza sarebbe interessata o conosce già il suo lavoro?

M.I. No, soltanto una piccola minoranza.

F.U. C'è qualcosa che vorrebbe dire sul suo lavoro?

M.I. La solita frase andrà bene.

F.U. Desidera che il pubblico simpatizzi col suo lavoro e lo sostenga?

M.I. Certo, se questo però non significa degradarmi.

F.U. Degradarla?

M.I. Invischiarmi in imbrogli da imbonitore, quel genere di cose.

F.U. Capisco. Bene, grazie per il tempo che mi ha dedicato.

M.I. Non c'è problema. Lei deve fare il suo lavoro.

Beh, è un funzionario addetto alle relazioni pubbliche. Che cosa ci si può aspettare? Vediamo ora come il nostro matematico ideale se l'è cavata con uno studente che è venuto a porgli una strana domanda.

STUD. Professore, che cos'è una dimostrazone matematica?

M.I. Non lo sa? Che anno fa?

STUD. Il terzo.

M.I. Incredibile! Una dimostrazione è quello che lei mi ha visto fare alla lavagna tre volte alla settimana per tre anni! Ecco che cos'è una dimostrazione.

STUD. Scusi, professore, non mi sono spiegato bene. Sono uno studente di filosofia, non di matematica. Non ho mai seguito i suoi corsi.

M.I. Oh! Beh, in tal caso... ha seguito qualche corso di matematica, no? Conosce la dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo infinitesimale o del teorema fondamentale dell'algebra?

STUD. Ho visto ragionamenti in geometria ed algebra e calcolo infinitesimale che venivano chiamati dimostrazioni. Quel che le chiedo non sono *esempi* di dimostrazioni ma la definizione di dimostrazione. Altrimenti come faccio a dire quali esempi sono corretti?

M.I. Bene, l'intera faccenda è stata chiarita dal logico Tarski, suppongo, e da qualche altro, Russell e Peano può essere. Ad ogni modo, quel che si deve fare è questo: trascrivere gli assiomi della teoria in un linguaggio formale con una data lista di simboli o alfabeto. Poi, nello stesso simbolismo, scrivere l'ipotesi del teorema. Poi mostrare che è possibile trasformare passo passo l'ipotesi usando le regole della logica sino ad ottenere il teorema. Questa è una dimostrazione.

STUD. Davvero? Che strano! Ho seguito analisi 1 e 2, algebra 1 e topologia e non ho mai visto fare una cosa del genere.

M.I. Oh, naturalmente nessuno fa *davvero* così. Ci vorrebbe una vita! Semplicemente, si fa vedere che si può farlo; è sufficiente.

STUD. Ma anche così non è come quel che ho visto nei corsi o sui manuali. Così i matematici alla fin fine non danno davvero delle dimostrazioni.

M.I. Certo che lo facciamo! Se un teorema non è dimostrato non è niente.

STUD. E allora, che cosa è una dimostrazione? Se è questa cosa con linguaggio formale e trasformazione di formule, nessuno in realtà dimostra niente. Bisogna saper tutto sui linguaggi formali e la logica formale prima di fare dimostrazioni matematiche?

M.I. Naturalmente no! Meno ne sapete meglio è. Quella roba è tutta aria fritta.

STUD. Allora in realtà che cos'*è* una dimostrazione?

M.I. Bene, è un argomento che convince chi conosce l'argomento.

STUD. Chi conosce l'argomento? Allora la definizione di dimostrazione è soggettiva; dipende da particolari persone. Prima di decidere se qualcosa è una dimostrazione devo decidere chi sono gli esperti. Che cosa ha a che fare questo col dimostrare?

M.I. No, no. Non c'è niente di soggettivo! Tutti sanno che cos'è una dimostrazione. Basta leggere qualche libro, seguire i corsi di un matematico competente ed è fatta.

STUD. È sicuro?

M.I. Beh, è anche possibile che uno non ci riesca se non ha attitudine. Può anche capitare.

STUD. Quindi è *lei* che decide che cos'è una dimostrazione e se io non imparo a decidere nello stesso modo, lei decide che non ho attitudine.

M.I. Se non io, chi altri?

Infine il matematico ideale incontrò un filosofo positivista.

F.P. Questo suo platonismo è piuttosto incredibile. La matricola più sciocca sa come non moltiplicare le entità e voi ne avete non una manciata ma addirittura una infinità più che numerabile!

M.I. Non mi interesso di filosofia. Io sono un matematico.

F.P. Lei è come quel personaggio di Molière che non sapeva di parlare in prosa. Ha detto un non senso filosofico parlando di "prova rigorosa d'esistenza". Non sa che quel che esiste va osservato o almeno deve essere osservabile?

M.I. Guardi, io non ho tempo da perdere in dispute filosofiche. Francamente, ho seri dubbi che voialtri sappiate di che cosa state parlando; altrimenti riuscireste ad esprimervi in forma precisa e così io sarei in grado di capire la vostra argomentazione e controllarla. Quanto al fatto che sarei platonista, questa è solo una figura retorica di comodo. Non ho mai pensato che gli iperquadrati esistano. Quando dico che esistono, tutto quel che intendo è che gli assiomi per gli iperquadrati hanno un modello. In altre parole, non se ne possono dedurre contraddizioni formali e così, secondo il modo matematico usuale, siamo liberi di postularne l'esistenza. L'intera faccenda in realtà non significa niente, è solo un gioco, come gli scacchi, che giochiamo con gli assiomi e le regole d'inferenza.

F.P. Beh, non volevo essere così duro. Sono sicuro che l'aiuta nel suo lavoro immaginare di star parlando di qualcosa di reale.

M.I. Io non sono un filosofo, la filosofia mi annoia. Parli, parli e non arrivi mai da nessuna parte. Il mio lavoro è dimostrare teoremi, non rompermi la testa su quel che vogliono dire.

Il matematico ideale si sente pronto, se mai si desse l'occasione, a incontrare intelligenze extragalattiche. Il suo primo sforzo per comunicare sarebbe di scrivere (o comunque trasmettere) le prime duecento cifre dello sviluppo binario di pi greco. Considera ovvio che ogni intelligenza in grado di comunicare da una galassia all'altra sia matematica e che ha senso parlare d'intelligenza matematica a prescindere dai pensieri e dalle azioni degli esseri umani. Considera inoltre ovvio che la rappresentazione binaria e il numero reale pi greco facciano parte dell'ordine intrinseco dell'universo.

È disposto ad ammettere che non si tratta di oggetti naturali ma sosterrà che sono stati scoperti, non inventati. La loro scoperta, in una forma più o meno simile alla nostra, è inevitabile se ci s'innalza al di sopra del fango primordiale per comunicare con altre galassie (o anche con altri sistemi solari).

Ecco il dialogo che un giorno il matematico ideale ha avuto con un umanista scettico.

U.S. Lei crede nei suoi numeri e nelle sue curve proprio come una volta i missionari cristiani credevano nel loro crocifisso. Se un missionario fosse andato sulla luna nel 1500, avrebbe brandito il suo crocifisso per mostrare ai lunari che era cristiano aspettandosi che anche loro avessero un loro simbolo da agitare in risposta[1]. Lei è ancora più arrogante con il suo sviluppo di pi greco.

M.I. Arrogante? È stato controllato e ricontrollato, sino a 100.000 cifre!

U.S. Ho visto quanto poco ha da dire persino a un matematico americano che non conosce il suo gioco con gli iperquadrati. Non otterrebbe nessun risultato se provasse a comunicare con un fisico teorico; non è in grado di leggerne gli scritti più di quanto io sappia leggere i suoi. Gli articoli nel suo campo di ricerca anteriori al 1910 sono lettera morta per lei come il testamento di Tutankhamen. Come fa a pensare di poter comunicare con un'intelligenza extragalattica?

M.I. Se non io, chi altri?

U.S. Chiunque altro! Non può forse darsi che vita e morte, amore ed odio, gioia e disperazione siano messaggi universali più di un'arida formula pedantesca che nessuno se non lei e alcune altre centinaia di invididui del suo stampo saprebbero distinguere da uno sgorbio di zampa di gallina?

M.I. La ragione per cui le mie formule sono adatte alla comunicazione intergalattica è proprio la stessa per cui non è la migliore per la comunicazione sulla terra. È esente da ogni limitazione umana.

U.S. Forse i missionari non si sarebbero espressi proprio così a proposito del crocifisso, ma probabilmente avrebbero detto qualcosa di analogo, certamente non meno assurdo e pretenzioso.

Questi bozzetti non volevano essere malevoli; infatti si applicherebbero anche agli autori di questo libro. Ma è un fatto troppo ovvio, e proprio per questo facilmente trascurato, che il lavoro matematico, che senza dubbio per la lunga familiarità il matematico prende per acquisito, è un fenomeno misterioso, quasi inesplicabile dal punto di vista di chi ne è fuori. In questo caso, l'estraneo può essere un

[1] Cfr. la descrizione della spedizione di Coronado a Cibola nel 1540: "C'erano circa ottanta cavalieri in avanscoperta oltre a venticinque o trenta fanti e un gran numero di alleati indiani. Della partita erano tutti i preti poiché nessuno di loro voleva rimanere indietro con l'esercito. Era loro compito trattare con gli indiani amichevoli che incontrassero e tutti portavano la Croce, un simbolo che [...] già aveva cominciato ad esercitare un'influenza sui nativi del luogo" (H.E. Bolton, *Coronado*, Albuquerque 1949).

profano, un collega d'università o anche uno scienziato che usa la matematica nel proprio lavoro.

Il matematico normalmente presume che la percezione che egli ha di se stesso sia l'unica da tenere in considerazione. Ammetteremmo la stessa pretesa per ogni altra congregazione esoterica? Oppure la descrizione spassionata delle sue attività da parte di un estraneo attento, ben informato, non sarebbe più affidabile di quella di chi fa parte di tale congregazione e forse è incapace di notare e tanto meno di porre in discussione il credo della sua *coterie*?

I matematici sanno che stanno studiando una realtà oggettiva. Un estraneo ha l'impressione che siano impegnati in una comunicazione esoterica con se stessi e una piccola cricca di amici. Come potremmo da matematici dimostrare a un estraneo scettico che i nostri teoremi hanno un significato anche al di fuori della nostra confraternita?

Se una persona del genere accetta la nostra disciplina e si sottopone a due o tre anni di specializzazione in matematica, assorbirà il nostro modo di pensare e non sarà più l'estraneo critico di una volta. Allo stesso modo, un critico della Scientologia che si sottoponesse ad alcuni anni di "studio" sotto la guida di "esperti patentati" in Scientologia potrebbe benissimo trasformarsi in un credente.

Se uno studente non è in grado di assorbire il nostro modo di pensare lo bocciamo, naturalmente. Se supera i nostri catenacci e poi decide che le nostre argomentazioni sono oscure e scorrette lo liquidiamo come un balordo, un eccentrico o un disadattato.

Naturalmente tutto ciò non prova che siamo in errore nel ritenere di essere in possesso di un metodo affidabile per scoprire verità oggettive. Ma dobbiamo fermarci un attimo e renderci conto che, al di fuori della nostra cerchia, molto di ciò che facciamo è incomprensibile. Non c'è modo di convincere uno scettico sicuro di sé che le cose di cui parliamo hanno senso, tanto meno che "esistono".