SOLUZIONI Primo appello Febbraio 2006.
(**N.B.**: Possono essere presenti errori di battitura!)

Fila B.

1) a) Effettuando il cambiamento di coordinate metrico

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

si ottiene l'equazione $x'^2 + y'^2 - z'^2 = 9$. Si tratta quindi di un iperboloide ad una falda.

b) Il generico elemento π ha equazione $\lambda y + \mu z = 0$, con λ e μ numeri reali non entrambi nulli.

Se $\lambda = 0$ si ottiene il piano di equazione $z = 0$; se $\lambda \neq 0$, dividendo per λ, e ponendo $k = \mu/\lambda$, l'equazione precedente diventa $y + kz = 0$ che, al variare di k fra i numeri reali, rappresenta tutti i piani $\pi \in \mathcal{F}$, ad eccezione del piano $z = 0$.

c) È conveniente usare la forma $y + kz = 0$ trovata al punto precedente, trattando a parte il piano $z = 0$.

L'intersezione fra $\mathcal{Q}$ ed il piano $z = 0$ è data dai punti le cui coordinate sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 + 6x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

L'intersezione è quindi la conica $x^2 - y^2 + 6x = 0$ nel piano $z = 0$.

Effettuando il cambiamento di coordinate metrico

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

si ottiene l'equazione $x'^2 - y'^2 = 9$. Si tratta quindi di un'iperbole.

Consideriamo ora l'intersezione fra $\mathcal{Q}$ ed il generico piano $y + kz = 0$. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 + 6x = 0 \\ y + kz = 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} x^2 + (1 - k^2)z^2 + 6x = 0 \\ y + kz = 0 \end{cases}$$

L'intersezione è quindi la conica $x^2 + (1 - k^2)z^2 + 6x = 0$ nel piano $y + kz = 0$. Effettuando il cambiamento di coordinate metrico

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

si ottiene l'equazione $x'^2 + (1-k^2)z'^2 = 9$.

Se $1-k^2 > 0$, cioè $-1 < k < 1$, si tratta di un'ellisse.

Se $1-k^2 < 0$, cioè $k < -1$ oppure $k > 1$, si tratta di un'iperbole.

Se $1-k^2 = 0$, cioè $k = -1$ oppure $k = 1$, si tratta di una conica degenere, più precisamente delle due rette parallele di equazioni

$$\begin{cases} x' = 3 \\ y' + kz' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -3 \\ y' + kz' = 0 \end{cases}$$

2) a) Si tratta di una circonferenza. La parametrizzazione più semplice è: $(2 + 2\sin t, 3 + 2\cos t)$, al variare di $t \in \mathbf{R}$.

Si tratta di una parametrizzazione regolare, poichè le componenti sono $\mathcal{C}^\infty$, e poichè il modulo di γ' non si annulla mai. Trattandosi di una circonferenza, la curvatura in ogni suo punto è pari al reciproco del raggio, cioè $1/2$.

3) Si tratta di un sistema lineare omogeneo la cui matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1-3\mu & 2\lambda & 1 \\ 0 & 1-3\mu & 2\lambda \\ 0 & 0 & 1-3\mu \end{pmatrix}$$

Se $1-3\mu \neq 0$, cioè $\mu \neq 1/3$, la matrice ha rango 3, per cui il sistema ha l'unica soluzione $(0,0,0)$.

Se $\mu = 1/3$ e $\lambda \neq 0$, la matrice ha rango 2, per cui il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da $3-2=1$ parametro, e cioè $(x,0,0)$, al variare di x fra i numeri reali.

Se $\mu = 1/3$ e $\lambda = 0$, la matrice ha rango 1, per cui il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da $3-1=2$ parametri, e cioè $(x,y,0)$, al variare di x, y fra i numeri reali.

Fila A.

1) Si tratta di un sistema lineare omogeneo la cui matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1-\beta & \alpha & 1 \\ 0 & 1-\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Se $1-\beta \neq 0$, cioè $\beta \neq 1$, la matrice ha rango 3, per cui il sistema ha l'unica soluzione $(0,0,0)$.

Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq 0$, la matrice ha rango 2, per cui il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da $3-2=1$ parametro, e cioè $(x,0,0)$, al variare di x fra i numeri reali.

Se $\beta = 1$ e $\alpha = 0$, la matrice ha rango 1, per cui il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da $3 - 1 = 2$ parametri, e cioè $(x, y, 0)$, al variare di x, y fra i numeri reali.

2) a) Si tratta di una circonferenza. La parametrizzazione più semplice è: $(-1 + 3\sin t, 1 + 3\cos t)$, al variare di $t \in \mathbf{R}$.

Si tratta di una parametrizzazione regolare, poichè le componenti sono $\mathcal{C}^\infty$, e poichè il modulo di γ' non si annulla mai. Trattandosi di una circonferenza, la curvatura in ogni suo punto è pari al reciproco del raggio, cioè $1/3$.

3) a) Si può innanzitutto semplificare l'equazione dividendo per 2, ottenendo $x^2 + y^2 - z^2 + 4y = 0$.

Effettuando il cambiamento di coordinate metrico

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + 2 \\ z' = y \end{cases}$$

si ottiene l'equazione $x'^2 + y'^2 - z'^2 = 4$. Si tratta quindi di un iperboloide ad una falda.

b) Il generico elemento π ha equazione $\lambda x + \mu z = 0$, con λ e μ numeri reali non entrambi nulli.

Se $\lambda = 0$ si ottiene il piano di equazione $z = 0$; se $\lambda \neq 0$, dividendo per λ, e ponendo $k = \mu/\lambda$, l'equazione precedente diventa $x + kz = 0$ che, al variare di k fra i numeri reali, rappresenta tutti i piani $\pi \in \mathcal{F}$, ad eccezione del piano $z = 0$.

c) È conveniente usare la forma $x + kz = 0$ trovata al punto precedente, trattando a parte il piano $z = 0$.

L'intersezione fra $\mathcal{Q}$ ed il piano $z = 0$ è data dai punti le cui coordinate sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 + 4y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

L'intersezione è quindi la conica $x^2 + y^2 + 4y = 0$ nel piano $z = 0$.

Effettuando il cambiamento di coordinate metrico

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + 2 \\ z' = z \end{cases}$$

si ottiene l'equazione $x'^2 + y'^2 = 4$. Si tratta quindi di un'ellisse.

Consideriamo ora l'intersezione fra $\mathcal{Q}$ ed il generico piano $x + kz = 0$. Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 + 4y = 0 \\ x + kz = 0 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} y^2 + (k^2 - 1)z^2 + 4y = 0 \\ x + kz = 0 \end{cases}$$

L'intersezione è quindi la conica $y^2 + (k^2 - 1)z^2 + 4y = 0$ nel piano $x + kz = 0$. Effettuando il cambiamento di coordinate metrico

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + 2 \\ z' = z \end{cases}$$

si ottiene l'equazione $y'^2 + (k^2 - 1)z'^2 = 4$.

Se $k^2 - 1 < 0$, cioè $-1 < k < 1$, si tratta di un'iperbole.

Se $k^2 - 1 > 0$, cioè $k < -1$ oppure $k > 1$, si tratta di un'ellisse.

Se $k^2 - 1 = 0$, cioè $k = -1$ oppure $k = 1$, si tratta di una conica degenere, più precisamente delle due rette parallele di equazioni

$$\begin{cases} y' = 2 \\ x' + kz' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = -2 \\ x' + kz' = 0 \end{cases}$$