Analisi Matematica I
Integrali e integrali impropri (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Si ha $\int e^x\big(\frac{1}{2}x^2+x\big)\,dx = e^x\big(\frac{1}{2}x^2+x\big) - \int e^x\big(x+1\big)\,dx = e^x\big(\frac{1}{2}x^2+x\big) - e^x\big(x+1\big) + \int e^x\,dx = \frac{1}{2}x^2e^x + C$.

(2) Si ha $\int (x-4)^2\sin x\,dx \overset{(a)}{=} -(x-4)^2\cos x + \int 2(x-4)\cos x\,dx \overset{(b)}{=} -(x-4)^2\cos x + 2(x-4)\sin x - \int 2\sin x\,dx = -(x-4)^2\cos x + 2(x-4)\sin x + 2\cos x + C$, dove si è usata l'integrazione per parti, in (a) con $\begin{cases} f(x)=(x-4)^2, & f'(x)=2(x-4),\\ g'(x)=\sin x, & g(x)=-\cos x,\end{cases}$ e in (b) con $\begin{cases} f(x)=2(x-4), & f'(x)=2,\\ g'(x)=\cos x, & g(x)=\sin x,\end{cases}$

(3) Si ha $\int x^4\cos x\,dx = x^4\sin x - 4\int x^3\sin x\,dx = x^4\sin x + 4x^3\cos x - 12\int x^2\cos x\,dx = x^4\sin x + 4x^3\cos x - 12x^2\sin x + 24\int x\sin x\,dx = x^4\sin x + 4x^3\cos x - 12x^2\sin x - 24x\cos x + 24\sin x + C$.

(4) Si ha $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}} \overset{(a)}{=} \int \frac{1}{2}z^{-1/3}\,dz = \frac{3}{4}z^{2/3} = \frac{3}{4}(2x+1)^{2/3} + C$, dove in (a) si è usato il cambiamento di variabili $z = 2x+1 \implies dz = 2dx$.

(5) Si ha $\int x\sqrt{1+4x^2}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{1}{8}\sqrt{z}\,dz = \frac{1}{12}z^{3/2} = \frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2} + C$, dove in (a) si è usato il cambiamento di variabili $z = 1+4x^2 \implies dz = 8x\,dx$.

(6) Si ha $\int \sin^2 x\cos^7 x\,dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^3\,\cos x\,dx \overset{(a)}{=} \int y^2(1-y^2)^3\,dy = \frac{1}{3}\,y^3 - \frac{3}{5}\,y^5 + \frac{3}{7}\,y^7 - \frac{1}{9}\,y^9 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{3}{5}\sin^5 x + \frac{3}{7}\sin^7 x - \frac{1}{9}\sin^9 x + C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\sin x = y \implies \cos x\,dx = dy$.

(7) Si ha $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x\,dx \overset{(a)}{=} -\int \frac{1-y^2}{y^2}\,dy = y + \frac{1}{y} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\cos x = y \implies -\sin x\,dx = dy$.

(8) Si ha $\int \cos^4 x\,dx \overset{(a)}{=} \frac{1}{4}\int\big(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\big)\,dx = \frac{1}{4}\big(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\big)+C$, dove in (a) si è usato il risultato $\cos^4 x = \frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x) = \frac{1}{4}\big(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\big) = \frac{1}{4}\big(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\big)$.

(9) Si ha $\int \cos^2 x(\cos x+\sin x)^2\,dx = \int \cos^2 x\big(1+2\cos x\sin x\big)\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx + 2\int \cos^3 x\sin x\,dx \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\sin(2x) - 2\int z^3\,dz = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos^4 x + C$, dove in (a) si è eseguita la sostituzione $z = \cos x \implies dz = -\sin x\,dx$.

(10) Si ha $\int x(\sin 2x - \sin x)\,dx \overset{(a)}{=} \frac{1}{4}\int z\sin z\,dz - \int x\sin x\,dx \overset{(b)}{=} \frac{1}{4}(\sin z - z\cos z) - (\sin x - x\cos x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x - \sin x + x\cos x$, dove in (a) si è usata la sostituzione $z = 2x$ (nel primo integrale), e in (b) si è usato il risultato $\int t\sin t\,dt = -t\cos t + \int \cos t\,dt = -t\cos t + \sin t$.

(11) Si ha $\int e^{2\sqrt{t}}\,dt \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}\int ze^z\,dz = \frac{1}{2}(z-1)e^z = \frac{1}{2}(2\sqrt{t}-1)e^{2\sqrt{t}}$, dove in (a) si è usato il cambiamento di variabili $z = 2\sqrt{t} \implies t = \frac{1}{4}z^2$, $dt = \frac{1}{2}z\,dz$.

(12) Si ha $\int e^{1-\sqrt[3]{x}}\,dx \overset{(a)}{=} -3\int (y-1)^2e^y\,dy \overset{(b)}{=} -3(y-1)^2e^y + 6\int (y-1)e^y\,dy = -3(y-1)^2e^y + 6(y-1)e^y - \int 6e^y + C = -3(y-1)^2e^y + 6(y-1)e^y - 6e^y + C = -3e^{1-\sqrt[3]{x}}(x^{2/3}+2x^{1/3}+2) + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $1-\sqrt[3]{x} = y \implies x = (1-y)^3, dx = -3(1-y)^2\,dy$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y)=(y-1)^2, & f'(y)=2(y-1),\\ g'(y)=e^y, & g(y)=e^y,\end{cases}$ e in (c) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y)=y-1, & f'(y)=1,\\ g'(y)=e^y, & g(y)=e^y.\end{cases}$

(13) Si ha $\int \frac{\log\log x}{x}\, dx \overset{(a)}{=} \int \log y\, dy \overset{(b)}{=} y(\log y - 1) + C = \log x(\log\log x - 1) + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\log x = y \implies \frac{dx}{x} = dy$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y) = \log y, & f'(y) = \frac{1}{y}, \\ g'(y) = 1, & g(y) = y. \end{cases}$

(14) Si ha $\int \arcsin\sqrt{x}\, dx \overset{(a)}{=} \int 2y \arcsin y\, dy \overset{(b)}{=} y^2 \arcsin y - \int \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \overset{(c)}{=} y^2 \arcsin y - \int \sin^2 z\, dz = y^2 \arcsin y - \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2z)\, dz = y^2 \arcsin y - \frac{1}{2}\, z + \frac{1}{4}\, \sin 2z + C = y^2 \arcsin y - \frac{1}{2}\, \arcsin y + \frac{1}{2}\, y\sqrt{1-y^2} + C = \left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x} = y \implies dx = 2y\, dy$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y) = \arcsin y, & f'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \\ g'(y) = 2y, & g(y) = y^2, \end{cases}$ e in (c) la sostituzione $y = \sin z \implies dy = \cos z\, dz$.

(15) Si ha $\int \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}\, dx \overset{(a)}{=} \int \frac{2y}{\cos^2 y}\, dy \overset{(b)}{=} 2y \operatorname{tg} y - \int 2 \operatorname{tg} y\, dy = 2y \operatorname{tg} y - 2 \int \frac{\sin y}{\cos y}\, dy = 2y \operatorname{tg} y + 2 \log|\cos y| + C = 2\sqrt{x} \operatorname{tg}\sqrt{x} + 2 \log|\cos\sqrt{x}| + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x} = y \implies dx = 2y\, dy$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y) = 2y, & f'(y) = 2, \\ g'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}, & g(y) = \operatorname{tg} y. \end{cases}$

$\square$

Svolgimento esercizio 2

(1) Si ha $\int \frac{2x+1}{x(x^2+1)}\, dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\, \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}\right) dx = \log|x| - \frac{1}{2}\, \log(x^2+1) + 2 \operatorname{arctg} x + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x-2}{x^2+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\, \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}$.

(2) Si ha $\int \frac{2x+1}{x(x^2-1)}\, dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{3}{2}\, \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\, \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{3}{2}\, \log|x-1| - \log|x| - \frac{1}{2}\, \log|x+1| + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{2x+1}{x(x^2-1)} = \frac{3}{2}\, \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\, \frac{1}{x+1}$.

(3) Si ha $\int \frac{x-3}{x(x-1)(x-2)}\, dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{3}{2}\, \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\, \frac{1}{x-2}\right) dx = 2\log|x-1| - \frac{3}{2}\, \log|x| - \frac{1}{2}\, \log|x-2| + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{x-3}{x(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2}\, \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\, \frac{1}{x-2}$.

(4) Si ha $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}\, dx \overset{(a)}{=} \int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\right) dx = x + \log|x| + \log|x-1| - \frac{2}{x-1} + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{x^3+1}{x(x-1)^2} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

(5) Si ha $\int \frac{2x^4+3}{x(x+1)^2}\, dx \overset{(a)}{=} \int \left(2x - 4 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x+1} - \frac{5}{(x+1)^2}\right) dx = x^2 - 4x + 3\log|x| + 3\log|x+1| + \frac{5}{x+1} + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{2x^4+3}{x(x+1)^2} = 2x - 4 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x+1} - \frac{5}{(x+1)^2}$.

(6) Si ha $\int \frac{x^2+3x+1}{x(x^2-1)^2}\, dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4}\, \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\, \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{5}{4}\, \frac{1}{x-1} + \frac{5}{4}\, \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx = \log|x| + \frac{1}{4}\, \log|x+1| - \frac{1}{4}\, \frac{1}{x+1} - \frac{5}{4}\, \log|x-1| - \frac{5}{4}\, \frac{1}{x-1} + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{x^2+3x+1}{x(x^2-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}\, \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\, \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{5}{4}\, \frac{1}{x-1} + \frac{5}{4}\, \frac{1}{(x-1)^2}$.

(7) Si ha $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+1) + C$.

(8) Si ha $\int \frac{x^4+1}{x^2+2x+2}\, dx \overset{(a)}{=} \int \left(x^2 - 2x + 2 - \frac{3}{x^2+2x+2}\right) dx = \frac{1}{3}\, x^3 - x^2 + 2x - 3\operatorname{arctg}(x+1) + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{x^4+1}{x^2+2x+2} = x^2 - 2x + 2 - \frac{3}{x^2+2x+2}$.

(9) Si ha $\int \frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{3}{x^2-2x+2}\right) dx = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2-2x+2) + 3\operatorname{arctg}(x-1) + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x-4}{x^2-2x+2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{3}{x^2-2x+2}$.

(10) Si ha $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$.

(11) Si ha $\int \frac{3x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \left(\frac{3}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}\right) dx = \frac{3}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$.

(12) Si ha $\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)} \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}\right) dx = \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+x+1}$.

(13) Si ha $\int \frac{x^2+5x+2}{(x^2+1)(x^2-x)}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{4}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1}\right) dx = 4\log|x-1| - 2\log|x| - \log(x^2+1) - 3\operatorname{arctg} x + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{x^2+5x+2}{(x^2+1)(x^2-x)} = \frac{4}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{2x+3}{x^2+1} = \frac{4}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1}$.

(14) Si ha $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{x^2+4}\right) dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{12}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{x^2+4}$.

(15) Si ha $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + c$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1}\right)$.

(16) Si ha $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(-\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)}\right) dx = -\frac{3}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\,\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)} + c$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{Dx^2+Ex+F}{x(x^2+1)} = -\frac{3}{2}\,\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)}$.

$\square$

Svolgimento esercizio 3

(1) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{2y^2}{y+1}\,dy = 2\int \left(y-1+\frac{1}{y+1}\right) dy = y^2 - 2y + 2\log|y+1| + C = x - 2\sqrt{x} + 2\log|\sqrt{x}+1| + C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{x} = y \implies dx = 2y\,dy$.

(2) $\int \frac{x+1}{2x(x-3\sqrt{x}+2)}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{t^2+1}{t(t^2-3t+2)}\,dt = \int \left(\frac{1}{2t} - \frac{2}{t-1} + \frac{5}{2}\,\frac{1}{t-2}\right) dt = \frac{1}{2}\log t - 2\log|t-1| + \frac{5}{2}\log|t-2| + C = \frac{1}{4}\log x - 2\log|\sqrt{x}-1| + \frac{5}{2}\log|\sqrt{x}-2| + C$, dove in (a) si è eseguita la sostituzione $\sqrt{x} = t \implies dx = 2tdt$.

(3) $\int \frac{\sqrt{x+1}+3}{x+2}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{2(y^2+3y)}{y^2+1}\,dy \overset{(b)}{=} 2\int \left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{2y-1}{y^2+1} - \frac{1}{y^2+1}\right) dy = 2y + 3\log(y^2+1) - 2\operatorname{arctg} y + C = 2\sqrt{x+1} + 3\log|x+2| - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x+1} = y \implies dx = 2y\,dy$, e in (b) la decomposizione $\frac{y^2+3y}{y^2+1} = 1 + \frac{3y-1}{y^2+1} = 1 + \frac{3}{2}\,\frac{2y-1}{y^2+1} - \frac{1}{y^2+1}$.

(4) $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{x+2\sqrt{x-1}+2}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{2(y^2+y)}{y^2+2y+3}\,dy \overset{(b)}{=} 2\int \left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{2y+2}{y^2+2y+3} - \frac{2}{y^2+2y+3}\right) dy = 2y - \log(y^2+2y+3) - 2\int \frac{dy}{\left(\frac{y+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = 2y - \log(y^2+2y+3) - 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{y+1}{\sqrt{2}} + C = 2\sqrt{x-1} - \log\left|x+2\sqrt{x-1}+2\right| - 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{2}} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x-1} = y \implies dx = 2y\,dy$, e in (b) la decomposizione $\frac{y^2+y}{y^2+2y+3} = 1 - \frac{y+3}{y^2+2y+3} = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{2y+2}{y^2+2y+3} - \frac{2}{y^2+2y+3}$.

(5) $\int \frac{1}{e^{2x}+9}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{1}{y(y^2+9)}\,dy \overset{(b)}{=} \frac{1}{9}\int\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{y^2+9}\right)dy = \frac{1}{9}\log|y|-\frac{1}{18}\log(y^2+9)+C = \frac{1}{9}x-\frac{1}{18}\log(e^{2x}+9)+C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $e^x = y \implies x = \log y, dx = \frac{dy}{y}$, e in (b) la decomposizione $\frac{1}{y(y^2+9)} = \frac{1}{9}\frac{1}{y} - \frac{1}{9}\frac{y}{y^2+9}$.

(6) $\int \frac{1}{e^x \sinh x}\,dx = \int \frac{2}{e^{2x}-1}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{2}{y(y^2-1)}\,dy \overset{(b)}{=} \int\left(-\frac{2}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}\right)dy = -2\log|y|+\log|y^2-1|+C = -2x+\log|e^{2x}-1|+C = \log|1-e^{-2x}|+C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $e^x = y \implies x = \log y, dx = \frac{dy}{y}$, e in (b) la decomposizione $\frac{2}{y(y^2-1)} = -\frac{2}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}$.

(7) $\int(x^2+1)\log(x+1)\,dx \overset{(a)}{=} \left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\log(x+1) - \int\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\frac{1}{x+1}\,dx \overset{(b)}{=} \frac{1}{3}(x^3+3x)\log(x+1) - \frac{1}{3}\int\left(x^2-x+4-\frac{4}{x+1}\right)dx = \frac{1}{3}(x^3+3x)\log(x+1) - \frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}\log|x+1|+C$, dove si sono usate in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x)=\log(x+1), & f'(x)=\frac{1}{x+1}, \\ g'(x)=x^2+1, & g(x)=\frac{1}{3}x^3+x, \end{cases}$ e in (b) la decomposizione $\frac{x^3+3x}{x+1} = x^2-x+4-\frac{4}{x+1}$.

(8) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{y^4}{(y^2+1)^2}dy \overset{(b)}{=} \int\left(1-\frac{3}{2}\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\frac{y}{y^2+1}\right)dy = y-\frac{3}{2}\operatorname{arctg} y+\frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1}+C = \operatorname{tg} x - \frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $y = \operatorname{tg} x \implies \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}, \sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}, dx = \frac{dy}{1+y^2}$, e in (b) la decomposizione $\frac{y^4}{(y^2+1)^2} = 1-\frac{2y^2+1}{(y^2+1)^2} = 1-\frac{3}{2}\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\frac{y}{y^2+1}$.

(9) $\int \frac{\cos^2 x}{4\cos^2 x+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{1+3\cos^2 x}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{1}{(y^2+1)(y^2+4)}dy = \frac{1}{3}\int\frac{dy}{y^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{dy}{y^2+4} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} y - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} = \frac{1}{3}x-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2}$, dove in (a) si è usata la sostituzione $y = \operatorname{tg} x \implies \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}, dx = \frac{dy}{1+y^2}$.

(10) $\int x\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{4}{9}(y^2-1)\cdot y\cdot\frac{8}{9}y\,dy = \frac{32}{81}\left(\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{3}y^3\right)+C = \frac{32}{81}\left(\frac{81}{80}x^2+\frac{3}{20}x-\frac{2}{15}\right)\sqrt{1+\frac{9}{4}x}+C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $y = \sqrt{1+\frac{9}{4}x} \implies x = \frac{4}{9}(y^2-1),\ dx = \frac{8}{9}y\,dy$.

(11) $\int \sqrt{x^2+1}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{y^2+1}{2y}\frac{y^2+1}{2y^2}\,dy = \frac{1}{4}\int\left(y+\frac{2}{y}+\frac{1}{y^3}\right)dy = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}y^2+2\log|y|-\frac{1}{2y^2}\right)+C = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1})+C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{1+x^2} = y-x \implies x = \frac{y^2-1}{2y},\ dx = \frac{y^2+1}{2y^2}\,dy,\ \sqrt{1+x^2} = \frac{y^2+1}{2y}$.

(12) $\int \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\,dx = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx \overset{(a)}{=} \int\left(\frac{2t}{t^2-1}\right)^2\frac{t^2+1}{2t}\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \int\frac{(t^2+1)^2}{t(t^2-1)^2}\,dt = \int\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt = \log|t|-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}+C = \ldots = \log(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C$, dove in (a) si è eseguito il cambiamento di variabile $\sqrt{x^2+1} = t-x \implies x = \frac{t^2-1}{2t},\ dx = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt,\ \sqrt{x^2+1} = \frac{t^2+1}{2t}$.

(13) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{z^2-1}{2z}\frac{1}{\frac{z^2+1}{2z}+1}\frac{z^2-1}{2z^2}\,dz = \frac{1}{2}\int\frac{(z-1)^2}{z^2}\,dz = \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}\right)dz = \frac{1}{2}z-\log|z|-\frac{1}{2z}+C = \sqrt{x^2-1}-\log(x+\sqrt{x^2-1})+C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{x^2-1} = z-x \implies x = \frac{z^2+1}{2z}, dx = \frac{z^2-1}{2z^2}\,dz, \sqrt{x^2-1} = \frac{z^2-1}{2z}$.

(14) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+1}\,dx \overset{(a)}{=} \int\frac{\cos^2 y}{1+\sin^2 y}\,dy = \int\frac{\cos^2 y}{2\sin^2 y+\cos^2 y}\,dy = \int\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 y+1}\,dy \overset{(b)}{=} \int\frac{1}{2z^2+1}\frac{dz}{z^2+1} \overset{(c)}{=} \frac{1}{2}\int\left(\frac{2}{z^2+\frac{1}{2}}-\frac{2}{z^2+1}\right)dz = 2\int\frac{dz}{(\sqrt{2}z)^2+1} - \operatorname{arctg} z = \sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}z)-\operatorname{arctg} z+C = \sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} y)-y+C = \sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}\arcsin x)-\arcsin x+C \overset{(d)}{=} \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)-\arcsin x+C$, dove si è usata in (a) la sostituzione $x = \sin y \implies dx = \cos y\,dy$, in (b) la sostituzione $y = \operatorname{arctg} z \implies dy = \frac{dz}{z^2+1}$, in (c) la decomposizione $\frac{1}{z^2+\frac{1}{2}}\frac{1}{z^2+1} = \frac{2}{z^2+\frac{1}{2}}-\frac{2}{z^2+1}$, e in (d) la formula $\operatorname{tg}\arcsin x = \frac{\sin\arcsin x}{\sqrt{1-\sin^2\arcsin x}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(15) $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx \overset{(a)}{=} \int 9\sin^2 t\cdot 3\cos t\cdot 3\cos t\,dt \overset{(b)}{=} \frac{81}{8}\int(1-\cos 4t)\,dt = \frac{81}{8}\big(t-\frac14\sin 4t\big)+C = \frac{81}{8}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{81}{32}\sin\big(4\arcsin\frac{x}{3}\big)+C \overset{(c)}{=} \frac{81}{8}\arcsin\frac{x}{3}-\frac18 x(9-2x^2)\sqrt{9-x^2}+C$, dove in (a) si è eseguita la sostituzione $x=3\sin t \implies dx = 3\cos t dt$, in (b) si è usato il risultato $\sin^2 t\cos^2 t = \frac14\sin^2(2t) = \frac18(1-\cos 4t)$, e in (c) i risultati $\sin 4z = 4\sin z\cos z(1-2\sin^2 z)$ e $\sin\big(4\arcsin\frac{x}{3}\big) = 4\frac{x}{3}\big(1-\frac{2x^2}{9}\big)\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{4}{81}x(9-2x^2)\sqrt{9-x^2}$.

$\square$

Svolgimento esercizio 4

(1) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{|\sin x|}{\cos x}\,dx = 2\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = 2\big[-\log|\cos x|\big]_0^{\pi/4} = \log 2$.

(2) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^3 x\,dx = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx \overset{(a)}{=} -\int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dy = \big[\frac13 y^3 - y\big]_{-1}^{1} = -\frac43$, dove si è usata in (a) la sostituzione $\sin x = y \implies \cos x\,dx = dy$.

(3) $\int_0^{2\pi}|\sin x|^3\,dx = 2\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx \overset{(a)}{=} 2\int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dy = 2\big[y-\frac13 y^3\big]_{-1}^{1} = \frac83$, dove si è usata in (a) la sostituzione $\cos x = y \implies -\sin x\,dx = dy$.

(4) $\int_0^{\pi/3}\frac{1}{1-\sin x}\,dx \overset{(a)}{=} \int_0^{\sqrt3/3}\frac{1}{1-\frac{2y}{1+y^2}}\frac{2\,dy}{1+y^2} = \int_0^{\sqrt3/3}\frac{2\,dy}{(y-1)^2} = \big[-\frac{2}{y-1}\big]_0^{\sqrt3/3} = \frac{6}{3-\sqrt3}-2 = 1+\sqrt3$, dove si è usata in (a) la sostituzione $x = 2\operatorname{arctg} y \implies \sin x = \frac{2y}{1+y^2}$, $dx = \frac{2\,dy}{1+y^2}$.

(5) $\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{tg} x}{1+\sin^2 x}\,dx \overset{(a)}{=} \int_0^1\frac{y}{1+\frac{y^2}{1+y^2}}\frac{dy}{1+y^2} = \int_0^1\frac{y\,dy}{2y^2+1} = \big[\frac14\log(2y^2+1)\big]_0^1 = \frac14\log 3$, dove si è usata in (a) la sostituzione $x = \operatorname{arctg} y \implies \sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}$, $dx = \frac{dy}{1+y^2}$.

(6) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx \overset{(a)}{=} \int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\frac{y}{\sqrt{1-y}}\,dy \overset{(b)}{=} -2\int_{\sqrt{1-\frac{\sqrt2}{2}}}^{1}(z^2-1)\,dz = -2\Big[\frac13 z^3 - z\Big]_{\sqrt{1-\frac{\sqrt2}{2}}}^{1} = \frac43+\frac23\Big(1-\frac{\sqrt2}{2}\Big)^{3/2}-2\sqrt{1-\frac{\sqrt2}{2}}$, dove si è usata in (a) la sostituzione $\cos x = y \implies -\sin x\,dx = dy$, e in (b) la sostituzione $\sqrt{1-y} = z \implies y = 1-z^2, dy = -2z\,dz$.

(7) $\int_0^1 e^x\log(4+e^{2x})\,dx \overset{(a)}{=} \int_1^e\log(4+t^2)\,dt = \Big[t\log(4+t^2)-\int\frac{2t^2}{4+t^2}\,dt\Big]_1^e \overset{(b)}{=} \Big[t\log(4+t^2)-2t+4\int\frac{d(\frac{t}{2})}{1+(\frac{t}{2})^2}\Big]_1^e = \Big[t\log(4+t^2)-2t+4\operatorname{arctg}\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big]_1^e = e\log(4+e^2)-2e+4\operatorname{arctg}\frac{e}{2}-\log 5+2-4\operatorname{arctg}\frac12$, dove si è usato: in (a) la sostituzione $t = e^x$; in (b) la decomposizione $\frac{2t^2}{4+t^2} = 2-\frac{8}{4+t^2}$.

(8) $\int_{-1}^0\frac{1}{x-\sqrt{3x+4}}\,dx \overset{(a)}{=} \int_1^2\frac{2y}{y^2-3y-4}\,dy \overset{(b)}{=} \frac25\Big[\log|y+1|+4\log|y-4|\Big]_1^2 = \frac65\log\Big(\frac23\Big)$, dove in (a) si è eseguito il cambiamento di variabile $y = \sqrt{3x+4} \implies x = \frac13(y^2-4)$, $dx = \frac23 y\,dy$, e in (b) si è usato il risultato $\int\frac{2y}{y^2-3y-4}\,dy = \frac25\int\big(\frac{1}{y+1}+\frac{4}{y-1}\big)\,dt = \frac25\big(\log|y+1|+4\log|y-4|\big)+C$.

(9) $\int_0^1\frac{\log(x^2-x+1)}{(x+1)^2}\,dx \overset{(a)}{=} \Big[-\frac{1}{x+1}\log(x^2-x+1)\Big]_0^1+\int_0^1\frac{2x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}\,dx \overset{(b)}{=} \Big[-\log|x+1|+\frac12\log(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\Big(\frac{2x-1}{\sqrt3}\Big)\Big]_0^1 = -\log 2+\frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt3} = \frac{\pi}{3\sqrt3}-\log 2$, dove si è usata in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log(x^2-x+1), & f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}, \\ g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, & g(x) = -\frac{1}{x+1}, \end{cases}$ e in (b) il risultato $\int\frac{2x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}\,dx =$

$\int \left(\frac{x}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = -\log|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = -\log|x+1| + \frac{1}{2}\log(x^2 - x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$.

(10) $\int_1^e \frac{(2\log x+1)\operatorname{arctg}(\log x)}{x}\,dx \overset{(a)}{=} \int_0^1 (2y+1)\operatorname{arctg} y\,dy \overset{(b)}{=} \Big[(y^2+y)\operatorname{arctg} y\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^2+y}{y^2+1}\,dy \overset{(c)}{=} \frac{\pi}{2} - \Big[y + \frac{1}{2}\log(y^2+1) - \operatorname{arctg} y\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 1 - \frac{1}{2}\log 2$, dove si è usata in (a) la sostituzione $\log x = y \implies \frac{dx}{x} = dy$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y) = \operatorname{arctg} y, & f'(y) = \frac{1}{y^2+1}, \\ g'(y) = 2y+1, & g(y) = y^2+y, \end{cases}$ e in (c) il risultato $\int \frac{y^2+y}{y^2+1}\,dy = \int \left(1 + \frac{y-1}{y^2+1}\right) dy = \int \left(1 + \frac{1}{2}\frac{2y}{y^2+1} - \frac{1}{y^2+1}\right) dy = y + \frac{1}{2}\log(y^2+1) - \operatorname{arctg} y + C$.

(11) $\int_0^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}\right) dx \overset{(a)}{=} \int_0^{\sqrt{3}} 2y\operatorname{arctg}\left(\frac{y+3}{y+1}\right) dy \overset{(b)}{=} \Big[y^2 \operatorname{arctg}\frac{y+3}{y+1}\Big]_0^{\sqrt{3}} + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{y^2+4y+5}\,dy \overset{(c)}{=} \pi + \Big[y - 2\log(y^2+4y+5) + 3\operatorname{arctg}(y+2)\Big]_0^{\sqrt{3}} = \pi + \sqrt{3} - 2\log\frac{8+4\sqrt{3}}{5} + 3\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3}) - 3\operatorname{arctg}(2)$, dove in (a) si è eseguito il cambiamento di variabile $y = \sqrt{x} \implies x = y^2$, $dx = 2y\,dy$, in (b) si è eseguita l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y) = \operatorname{arctg}\frac{y+3}{y+1}, & f'(y) = -\frac{1}{y^2+4y+5}, \\ g'(y) = 2y, & g(y) = y^2, \end{cases}$, e in (c) si è usato il risultato $\int \frac{y^2}{y^2+4y+5}\,dy = \int \left(1 - \frac{2(2y+4)}{y^2+4y+5} + \frac{3}{(y+2)^2+1}\right) dy = y - 2\log(y^2+4y+5) + 3\operatorname{arctg}(y+2) + C$.

(12) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\sqrt{1+4\cos^2 x}\,dx \overset{(a)}{=} \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1+4y^2}}{y^2}\,dy \overset{(b)}{=} \int_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{5}} \frac{z^2+1}{2z}\frac{16z^2}{(z^2-1)^2}\frac{z^2+1}{4z^2}\,dz = 2\int_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{5}} \frac{(z^2+1)^2}{z(z^2-1)^2}\,dz \overset{(c)}{=} 2\int_{5+2\sqrt{6}}^{9+4\sqrt{5}} \frac{(t+1)^2}{t(t-1)^2}\,dt \overset{(d)}{=} \Big[\log|t| - \frac{4}{t-1}\Big]_{5+2\sqrt{6}}^{9+4\sqrt{5}} = \log\frac{9+4\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}} - \frac{4}{8+4\sqrt{5}} + \frac{4}{4+2\sqrt{6}} = \ldots = \log\frac{9+4\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{6} - \sqrt{5}$, dove in (a) si è eseguito il cambiamento di variabile $y = \cos x \implies dy = -\sin x\,dx$, in (b) si è eseguito il cambiamento di variabile $\sqrt{1+4y^2} = z - 2y \implies y = \frac{z^2-1}{4z}$, $\sqrt{1+4y^2} = \frac{z^2+1}{2z}$, $dy = \frac{z^2+1}{4z^2}\,dz$, in (c) si è eseguito il cambiamento di variabile $t = z^2 \implies dt = 2z\,dz$, e in (d) si è usato il risultato $\int \frac{(t+1)^2}{t(t-1)^2}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{4}{(t-1)^2}\right) dt = \log|t| - \frac{4}{t-1} + C$.

□

Svolgimento esercizio 5

(1) Determiniamo una primitiva $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{2y+1}{y^2+y}\frac{2(y^2+y)}{(2y+1)^2}\,dy = \int \frac{2dy}{2y+1} = \log|2y+1| + C = \log(1+2x+2\sqrt{x^2+x}\,) + C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{x^2+x} = y - x \implies x = \frac{y^2}{1+2y}$, $\sqrt{x^2+x} = \frac{y^2+y}{1+2y}$, $dx = \frac{2y^2+2y}{(1+2y)^2}\,dy$.
Allora $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \left[\log(1+2x+2\sqrt{x^2+x}\,)\right]_c^1 = \log(3+2\sqrt{2}\,) - \lim_{c\to 0^+}\log(1+2c+2\sqrt{c^2+c}\,) = \log(3+2\sqrt{2}\,)$.

(2) Determiniamo una primitiva $\int \frac{\log(1+\sqrt{x}\,)}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x}\,)^2}\,dx \overset{(a)}{=} 2\int \frac{\log(1+y)}{(y+2)^2}\,dy \overset{(b)}{=} -2\frac{\log(1+y)}{y+2} + 2\int \frac{1}{(y+1)(y+2)}\,dy \overset{(c)}{=} -2\frac{\log(1+y)}{y+2} + 2\log|y+1| - 2\log|y+2| + C = -2\frac{\log(1+\sqrt{x}\,)}{2+\sqrt{x}} + 2\log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right) + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x} = y \implies x = y^2$, $dx = 2y\,dy$, in (b) l'integrazione per parti, con $\begin{cases} f(y) = \log(1+y), & f'(y) = \frac{1}{1+y}, \\ g'(y) = \frac{1}{(y+2)^2}, & g(y) = -\frac{1}{y+2}, \end{cases}$ e in (c) la decomposizione $\frac{1}{(y+1)(y+2)} = \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2}$.

Allora $\int_0^{\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}\, dx = \lim_{\omega\to+\infty} \left[-2\frac{\log(1+\sqrt{x})}{2+\sqrt{x}} + 2\log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)\right]_0^{\omega} = \lim_{\omega\to+\infty} \Big(-2\frac{\log(1+\sqrt{\omega})}{2+\sqrt{\omega}} + 2\log\left(\frac{1+\sqrt{\omega}}{2+\sqrt{\omega}}\right)\Big) + 2\log 2 = 2\log 2$.

(3) Determiniamo una primitiva $\int \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}(x+2\sqrt{x-1})}\, dx \overset{(a)}{=} \int \frac{\operatorname{arctg} y}{y(y^2+1+2y)}\, 2y dy = 2\int \frac{\operatorname{arctg} y}{(y+1)^2}\, dy \overset{(b)}{=} -2\frac{\operatorname{arctg} y}{y+1} + 2\int \frac{1}{(y+1)(y^2+1)}\, dy \overset{(c)}{=} -2\frac{\operatorname{arctg} y}{y+1} + \int \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{2}\frac{2y}{y^2+1} + \frac{1}{y^2+1}\right) dy = -2\frac{\operatorname{arctg} y}{y+1} + \log|y+1| - \frac{1}{2}\log(y^2+1) + \operatorname{arctg} y + C = -2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x-1}} + \log\left(\frac{1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x-1} = y \implies x = y^2+1$, $dx = 2y\, dy$, in (b) l'integrazione per parti, con $\begin{cases} f(y) = \operatorname{arctg} y, & f'(y) = \frac{1}{y^2+1}, \\ g'(y) = \frac{1}{(y+1)^2}, & g(y) = -\frac{1}{y+1}, \end{cases}$ e in (c) la decomposizione $\frac{2}{(y+1)(y^2+1)} = \frac{1}{y+1} - \frac{y-1}{y^2+1}$.

Allora $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}(x+2\sqrt{x-1})}\, dx = \lim_{\omega\to+\infty} \left[-2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x-1}} + \log\left(\frac{1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right]_1^{\omega} = \lim_{\omega\to+\infty} \Big(-2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\omega-1}}{1+\sqrt{\omega-1}} + \log\left(\frac{1+\sqrt{\omega-1}}{\sqrt{\omega}}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{\omega-1}\Big) = \frac{\pi}{2}$.

(4) Determiniamo una primitiva $\int e^{-x}(x+\sqrt{e^x-1})\, dx = \int xe^{-x}\, dx + \int e^{-x/2}\sqrt{1-e^{-x}}\, dx \overset{(a)}{=} -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx - 2\int \sqrt{1-y^2}\, dy \overset{(b)}{=} -(x+1)e^{-x} - 2\int \cos^2 z\, dz = -(x+1)e^{-x} - \int(1+\cos 2z)\, dz = -(x+1)e^{-x} - z - \frac{1}{2}\sin 2z + C = -(x+1)e^{-x} - \arcsin y - y\sqrt{1-y^2} + C = -(x+1)e^{-x} - \arcsin(e^{-x/2}) - e^{-x/2}\sqrt{1-e^{-x}} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $e^{-x/2} = y \implies -\frac{1}{2}e^{-x/2}\, dx = dy$, e l'integrazione per parti, con $\begin{cases} f(x) = x, & f'(x) = 1, \\ g'(x) = e^{-x}, & g(x) = -e^{-x}, \end{cases}$ e in (b) la sostituzione $y = \sin z \implies dy = \cos z\, dz$.

Allora $\int_0^{\infty} e^{-x}(x+\sqrt{e^x-1})\, dx = \lim_{\omega\to+\infty} \left[-(x+1)e^{-x} - \arcsin(e^{-x/2}) - e^{-x/2}\sqrt{1-e^{-x}}\right]_0^{\omega} = \lim_{\omega\to+\infty} \Big(-(\omega+1)e^{-\omega} - \arcsin(e^{-\omega/2}) - e^{-\omega/2}\sqrt{1-e^{-\omega}}\Big) + 1 + \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{\pi}{2}$.

(5) Determiniamo una primitiva: poiché $\int x(1-\cos x)e^{-x}\, dx = \int xe^{-x}\, dx - \int xe^{-x}\cos x\, dx$, calcoliamo $\int xe^{-x}\, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -(x+1)e^{-x} + C$, e $\int xe^{-x}\cos x\, dx \overset{(a)}{=} -(x+1)e^{-x}\cos x - \int(x+1)e^{-x}\sin x\, dx \overset{(b)}{=} -(x+1)e^{-x}\cos x + (x+2)e^{-x}\sin x - \int(x+2)e^{-x}\cos x\, dx$, dove si è usata l'integrazione per parti, in (a) con $\begin{cases} f(x) = \cos x, & f'(x) = -\sin x, \\ g'(x) = xe^{-x}, & g(x) = -(x+1)e^{-x}, \end{cases}$ e in (b) con $\begin{cases} f(x) = \sin x, & f'(x) = \cos x, \\ g'(x) = (x+1)e^{-x}, & g(x) = -(x+2)e^{-x}. \end{cases}$ Quindi, $2\int xe^{-x}\cos x\, dx + 2\int e^{-x}\cos x\, dx = -(x+1)e^{-x}\cos x + (x+2)e^{-x}\sin x$, cioè $\int xe^{-x}\cos x\, dx = \frac{1}{2}(x+2)e^{-x}\sin x - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\, dx \overset{(c)}{=} \frac{1}{2}(x+2)e^{-x}\sin x - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}\cos x - \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C = \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}\sin x - \frac{1}{2}xe^{-x}\cos x + C$, dove in (c) si è usato il risultato $\int e^{-x}\cos x\, dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\, dx = -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x\, dx \implies \int e^{-x}\cos x\, dx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)$. Concludendo, $\int x(1-\cos x)e^{-x}\, dx = -(x+1)e^{-x} - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}\sin x + \frac{1}{2}xe^{-x}\cos x + C$.

Allora $\int_0^{+\infty} x(1-\cos x)e^{-x}\, dx = \lim_{\omega\to+\infty} \left[-(x+1)e^{-x} - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}\sin x + \frac{1}{2}xe^{-x}\cos x\right]_0^{\omega} = \lim_{\omega\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\omega e^{-\omega}\cos\omega - (\omega+1)e^{-\omega} - \frac{1}{2}(\omega+1)e^{-\omega}\sin\omega + 1\right) = 1$.

(6) Determiniamo una primitiva $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = \int \frac{2dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \arcsin(2x-1) + C$.

Allora $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx = \lim_{a\to 0^-} \left[\arcsin(2x-1)\right]_a^{1/2} + \lim_{b\to 1^-} \left[\arcsin(2x-1)\right]_{1/2}^{b} = \pi$.

(7) Determiniamo una primitiva $\int \frac{\sin x \log(\sin x)}{\cos^2 x}\,dx \overset{(a)}{=} \frac{\log(\sin x)}{\cos x} - \int \frac{dx}{\sin x} = \frac{\log(\sin x)}{\cos x} - \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx \overset{(b)}{=} \frac{\log(\sin x)}{\cos x} - \int \frac{dy}{y^2-1} \overset{(c)}{=} \frac{\log(\sin x)}{\cos x} - \frac{1}{2}\log|y-1| + \frac{1}{2}\log|y+1| + C = \frac{\log(\sin x)}{\cos x} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) + C$, dove si sono usate in (a) l'integrazione per parti, con $\begin{cases} f(x) = \log(\sin x), & f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}, \\ g'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, & g(x) = \frac{1}{\cos x}, \end{cases}$ in (b) la sostituzione $\cos x = y \implies -\sin x\,dx = dy$, e in (c) la decomposizione $\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)$.

Allora $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \log(\sin x)}{\cos^2 x}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \left[\frac{\log(\sin x)}{\cos x} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)\right]_a^1 + \lim_{b\to\pi/2^-} \left[\frac{\log(\sin x)}{\cos x} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)\right]_1^{\pi/2} =$

$= \lim_{b\to\pi/2^-} \left(\frac{\log(\sin b)}{\cos b} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos b}{1-\cos b}\right)\right) - \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{\log(\sin a)}{\cos a} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos a}{1-\cos a}\right)\right) =$

$= \lim_{c\to 0^+} \frac{\log(\sin(\frac{\pi}{2}-c))}{\cos(\frac{\pi}{2}-c)} - \lim_{a\to 0^+} \frac{2\log(\sin a) - \cos a \log(1-\cos a)}{2\cos a} - \frac{1}{2}\log 2 =$

$= \lim_{a\to 0^+} \frac{\log(\cos a)}{\sin a} - \lim_{a\to 0^+} \frac{2\log a + o(1) - (1+o(a))\log\left(\frac{a^2}{2}(1+o(1))\right)}{2+o(1)} - \frac{1}{2}\log 2 =$

$= \lim_{a\to 0^+} \frac{\log(1-\frac{1}{2}a^2+o(a^2))}{a(1+o(1))} - \lim_{a\to 0^+} \frac{2\log a + o(1) - (1+o(a))(2\log a - \log 2 + o(1))}{2+o(1)} - \frac{1}{2}\log 2 =$

$= \lim_{a\to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}a^2(1+o(1))}{a(1+o(1))} - \lim_{a\to 0^+} \frac{\log 2 + o(1)}{2+o(1)} - \frac{1}{2}\log 2 = -\log 2.$

(8) Determiniamo una primitiva $\int \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}}\,dx \overset{(a)}{=} -\frac{2\log x}{\sqrt{x-1}} + \int \frac{2}{x\sqrt{x-1}}\,dx \overset{(b)}{=} -\frac{2\log x}{\sqrt{x-1}} + \int \frac{4\,dy}{y^2+1} = -\frac{2\log x}{\sqrt{x-1}} + 4\,\mathrm{arctg}\, y + C = -\frac{2\log x}{\sqrt{x-1}} + 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1} + C$, dove si sono usate in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log x, & f'(x) = \frac{1}{x}, \\ g'(x) = \frac{1}{(x-1)^{3/2}}, & g(x) = -\frac{2}{\sqrt{x-1}}, \end{cases}$ e in (b) la sostituzione $\sqrt{x-1} = y \implies x = y^2+1$, $dx = 2y\,dy$.

Allora $\int_1^\infty \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}}\,dx = \lim_{c\to 1^+} \left[-\frac{2\log x}{\sqrt{x-1}} + 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}\right]_c^2 + \lim_{\omega\to+\infty} \left[-\frac{2\log x}{\sqrt{x-1}} + 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}\right]_2^\omega = \lim_{c\to 1^+} \left(\frac{2\log c}{\sqrt{c-1}} - 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}\right) + \lim_{\omega\to+\infty} \left(-\frac{2\log\omega}{\sqrt{\omega-1}} + 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{\omega-1}\right) = 2\pi.$

(9) Determiniamo una primitiva $\int \frac{\log x}{(x-1)^{4/3}}\,dx \overset{(a)}{=} -\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int \frac{3}{x\sqrt[3]{x-1}}\,dx \overset{(b)}{=} -\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int \frac{9y\,dy}{y^3+1} \overset{(c)}{=} -\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int \left(-\frac{3}{y+1} + \frac{3}{2}\frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{9}{2}\frac{1}{y^2-y+1}\right)dy + C = -\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} - 3\log|y+1| + \frac{3}{2}\log(y^2-y+1) + 6\int \frac{dy}{1+\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)^2} + C = -\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} - 3\log|y+1| + \frac{3}{2}\log(y^2-y+1) + = -\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} - 3\log|1+\sqrt[3]{x-1}| + \frac{3}{2}\log\left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1\right) + 3\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}} + C$, dove si sono usate in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log x, & f'(x) = \frac{1}{x}, \\ g'(x) = \frac{1}{(x-1)^{4/3}}, & g(x) = -\frac{3}{\sqrt[3]{x-1}}, \end{cases}$ in (b) la sostituzione $\sqrt[3]{x-1} = y \implies x = y^3+1$, $dx = 3y^2\,dy$, e in (c) la decomposizione $\frac{9y}{y^3+1} = -\frac{3}{y+1} + \frac{3(y+1)}{y^2-y+1} = -\frac{3}{y+1} + \frac{3}{2}\frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{9}{2}\frac{1}{y^2-y+1}$.

Allora $\int_1^\infty \frac{\log x}{(x-1)^{4/3}}\,dx =$

$= \lim_{c\to 1^+} \left[-\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} - 3\log|1+\sqrt[3]{x-1}| + \frac{3}{2}\log\left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1\right) + 3\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}}\right]_c^2 +$

$+ \lim_{\omega\to+\infty} \left[-\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} - 3\log|1+\sqrt[3]{x-1}| + \frac{3}{2}\log\left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1\right) + 3\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}}\right]_2^\omega =$

$= \lim_{c\to 1^+} \left(\frac{3\log c}{\sqrt[3]{c-1}} + 3\log|1+\sqrt[3]{c-1}| - \frac{3}{2}\log\left(\sqrt[3]{(c-1)^2} - \sqrt[3]{c-1} + 1\right) - 3\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{c-1}-1}{\sqrt{3}}\right) +$

$+ \lim_{\omega\to+\infty} \left(-\frac{3\log\omega}{\sqrt[3]{\omega-1}} - 3\log|1+\sqrt[3]{\omega-1}| + \frac{3}{2}\log\left(\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - \sqrt[3]{\omega-1} + 1\right) + 3\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}\right) =$

$$= \tfrac{\pi\sqrt{3}}{2} + \lim_{\omega\to+\infty}\Big(-\tfrac{3\log\omega}{\sqrt[3]{\omega-1}} + \tfrac{3}{2}\log\tfrac{\sqrt[3]{(\omega-1)^2}-\sqrt[3]{\omega-1}+1}{(1+\sqrt[3]{\omega-1})^2} + 3\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\tfrac{2\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}\Big) = \tfrac{\pi\sqrt{3}}{2} + \tfrac{3\sqrt{3}\pi}{2} = 2\pi\sqrt{3}.$$

$\square$

Svolgimento esercizio 6

(1) Poiché $f(x) := \frac{\log(x+1)}{x^3+2x+1} = \frac{\log x}{x^3}(1+o(1))$, $x\to+\infty$, ne segue che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

(2) Poiché $f(x) := \frac{\log(2+x^2)}{\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}(x^2)} = \frac{2\log x}{\frac{\pi}{2}\sqrt{x}}(1+o(1))$, $x\to+\infty$, ne segue che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

(3) Sia $f(x) := \frac{\log x}{|x-1|^{5/4}\sin(x^{1/2})}$. Poiché $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}(1+o(1))$, $x\to 0^+$, allora $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{(x-1)(1+o(1))}{\sin 1\cdot|x-1|^{5/4}(1+o(1))} = -\frac{1}{\sin 1}\frac{1}{|x-1|^{1/4}}(1+o(1))$, $x\to 1^-$, allora $\int_{1/2}^1 f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

(4) Sia $f(x) := \frac{\log(x^2)}{x^{1/2}\arcsin(|x-1|^{9/4})}$. Poiché $f(x) = \frac{2\log x}{\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{x}}(1+o(1))$, $x\to 0^+$, allora $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{2(x-1)(1+o(1))}{|x-1|^{9/4}(1+o(1))} = -\frac{2}{|x-1|^{5/4}}(1+o(1))$, $x\to 1^-$, allora $\int_{1/2}^1 f(x)\,dx$ non converge. Ne segue che $\int_0^1 f(x)\,dx$ non converge.

(5) Sia $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)\log(1+\sqrt{x})}$. Poiché $f(x) = \frac{1}{x(1+o(1))}$, $x\to 0^+$, allora $\int_0^1 f(x)\,dx$ non converge. Poiché $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}x^{5/2}\log x(1+o(1))}$, $x\to+\infty$, allora $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

(6) Sia $f(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2x}+\mathrm{arctg}(x^{1/4})}$. Poiché $f(x) = \frac{1+o(1)}{x^{1/4}(1+o(1))}$, $x\to 0^+$, allora $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2x}(1+o(1))} = o\big(\frac{1}{x^{100}}\big)$, $x\to+\infty$, allora $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

(7) Poiché $f(x) := \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}{(x-1)^{1/2}}$ è tale che $|f(x)| \le \frac{1}{(x-1)^{1/2}}$, $x\to 1^+$, allora $\int_1^2 f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))} = \frac{1}{x}(1+o(1))$, $x\to+\infty$, allora $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

(8) Sia $f(x) := \frac{e^{-x}}{(x-4)^2(x+\frac{1}{2})^{1/3}}$. Poiché $f(x) = \frac{\sqrt{e}\,(1+o(1))}{\frac{27}{4}(x+\frac{1}{2})^{1/3}(1+o(1))}$, $x\to-\frac{1}{2}$, allora $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{e^{-4}(1+o(1))}{\sqrt[3]{\frac{9}{2}}(x-4)^2(1+o(1))}$, $x\to 4$, allora $\int_3^5 f(x)\,dx$ non converge. Poiché $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^{7/3}(1+o(1))} = o\big(\frac{1}{x^{100}}\big)$, $x\to+\infty$, allora $\int_5^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

(9) Sia $f(x) := \frac{e^{-x}}{(x-3)^{1/3}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}$. Poiché $f(x) = \frac{e^{-1/2}(1+o(1))}{-\sqrt[3]{\frac{5}{2}}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}(1+o(1))}$, $x\to\frac{1}{2}$, allora $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{e^{-3}(1+o(1))}{\sqrt{\frac{5}{2}}(x-3)^{1/3}(1+o(1))}$, $x\to 3$, allora $\int_2^5 f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^{5/6}(1+o(1))} = o\big(\frac{1}{x^{100}}\big)$, $x\to+\infty$, allora $\int_5^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

(10) Sia $f(x) := \frac{1}{(x-3)^{1/3}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}$. Poiché $f(x) = \frac{1}{-\sqrt[3]{\frac{5}{2}}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}(1+o(1))}$, $x\to\frac{1}{2}$, allora $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}(x-3)^{1/3}(1+o(1))}$, $x\to 3$, allora $\int_2^5 f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{1}{x^{5/6}(1+o(1))}$, $x\to+\infty$, allora $\int_5^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge. Ne segue che $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

(11) Sia $f(x) := \frac{1}{|x-3|^{3/4}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}$. Poiché $f(x) = \frac{1}{(\frac{5}{2})^{3/4}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}(1+o(1))}$, $x \to \frac{1}{2}$, allora $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}\,|x-3|^{3/4}(1+o(1))}$, $x \to 3$, allora $\int_{2}^{5} f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{1}{x^{5/4}(1+o(1))}$, $x \to +\infty$, allora $\int_{5}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

(12) Sia $f(x) := \frac{\log(3+|x|^{-1/4})}{|x-3|^{3/4}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}$. Poiché $f(x) = \frac{-\frac{1}{4}\log|x|(1+o(1))}{3^{3/4}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+o(1))}$, $x \to 0$, allora $\int_{-1}^{1/4} f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{\log(3+\sqrt[4]{2})(1+o(1))}{(\frac{5}{2})^{3/4}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}(1+o(1))}$, $x \to \frac{1}{2}$, allora $\int_{1/4}^{2} f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{\log(3+3^{-1/4})(1+o(1))}{\sqrt{\frac{5}{2}}\,|x-3|^{3/4}(1+o(1))}$, $x \to 3$, allora $\int_{2}^{5} f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{\log 3(1+o(1))}{x^{5/4}(1+o(1))}$, $x \to +\infty$, allora $\int_{5}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

(13) Sia $f(x) := e^{-x^2/2}$. Poiché $f(x) = e^{-x^2/2} = o\big(\frac{1}{x^{100}}\big)$, $x \to \pm\infty$, allora $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ e $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ convergono. Ne segue che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

$\square$

Svolgimento esercizio 7

(1) Sia $f(x) := \frac{1}{(1+x^2)(x+2)^\beta}$. Poiché $f(x) = \frac{1}{x^{2+\beta}(1+o(1))}$, per $x \to +\infty$, allora l'integrale $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff 2+\beta > 1 \iff \beta > -1$.

(2) Sia $f(x) := \frac{(\log(1+\frac{1}{x}))^\beta}{\sqrt{x}+1}$. Poiché $f(x) = \frac{\frac{1}{x^\beta}(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))} = \frac{1}{x^{\beta+1/2}}(1+o(1))$, per $x \to +\infty$, allora l'integrale $\int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta + \frac{1}{2} > 1 \iff \beta > \frac{1}{2}$.

(3) Sia $f(x) := \frac{\operatorname{arctg}(x+7)}{x(\log(x+2))^\beta}$. Poiché $f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}(1+o(1))}{x(\log x)^\beta(1+o(1))}$, per $x \to +\infty$, allora l'integrale $\int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta > 1$.

(4) Sia $f(x) := \big(1-\cos\frac{1}{x^3}\big)^\beta x^{\beta/2}$. Poiché $f(x) = \frac{x^{\beta/2}}{(2x^6)^\beta(1+o(1))} = \frac{1}{2^\beta x^{11\beta/2}}(1+o(1))$, per $x \to +\infty$, allora l'integrale $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \frac{11}{2}\beta > 1 \iff \beta > \frac{2}{11}$.

(5) Sia $f(x) := \frac{|\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}|^\beta}{\sqrt[3]{x}}$. Poiché $f(x) = \frac{(\frac{1}{6x^3})^\beta(1+o(1))}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{6^\beta x^{1/3-3\beta}}(1+o(1))$, per $x \to +\infty$, allora l'integrale $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \frac{1}{3} - 3\beta > 1 \iff \beta < -\frac{2}{9}$.

(6) Sia $f(x) := \frac{(e^x-1)^\beta}{\sqrt{x(1-x)}}$. Poiché, per $x \to 0^+$, $f(x) = \frac{x^\beta(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))} = \frac{1}{x^{1/2-\beta}}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_{0}^{1/2} f(x)\,dx$ converge $\iff 1/2-\beta < 1 \iff \beta > -\frac{1}{2}$. Poiché, per $x \to 1^-$, $f(x) = \frac{(e-1)^\beta(1+o(1))}{\sqrt{1-x}(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_{1/2}^{1} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Ne segue che l'integrale $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta > -\frac{1}{2}$.

(7) Sia $f(x) := \frac{\log x}{(x-1)^\beta}$. Poiché, per $x \to 1^+$, $f(x) = \frac{(x-1)(1+o(1))}{(x-1)^\beta} = \frac{1}{(x-1)^{\beta-1}(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta - 1 < 1 \iff \beta < 2$. Poiché, per $x \to +\infty$, $f(x) = \frac{\log x}{x^\beta(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta > 1$. Ne segue che l'integrale $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta \in (1,2)$.

(8) Sia $f(x) := \frac{\operatorname{arctg}(x^2+3)}{(x+1)^\beta(x+2)}$. Poiché, per $x \to (-1)^+$, $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} 4(1+o(1))}{(x+1)^\beta(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta < 1$. Poiché, per $x \to +\infty$, $f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}(1+o(1))}{x^{\beta+1}(1+o(1))}$, allora l'integrale

$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta+1>1 \iff \beta>0$. Ne segue che l'integrale $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta\in(0,1)$.

(9) Sia $f(x) := \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)^{\beta}$. Poiché, per $x\to 0^+$, $f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\beta}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_0^2 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta\in\mathbb{R}$. Poiché, per $x\to+\infty$, $f(x) = \frac{1}{x^{\beta}(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta>1$. Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta>1$.

(10) Sia $f(x) := \frac{e^{-x}}{(x-3)^{\beta}\sqrt{x}}$. Poiché, per $x\to 3^+$, $f(x) = \frac{e^{-3}(1+o(1))}{\sqrt{3}\,(x-3)^{\beta}(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_3^4 f(x)\,dx$ converge $\iff \beta<1$. Poiché, per $x\to+\infty$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^{\beta+1/2}(1+o(1))} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, allora l'integrale $\int_4^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta\in\mathbb{R}$. Ne segue che l'integrale $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta<1$.

(11) Sia $f(x) := (\operatorname{arctg} x)^{\beta}(\sqrt{x}+3)^{2\beta}$. Poiché, per $x\to 0^+$, $f(x) = 3^{2\beta}x^{\beta}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_0^4 f(x)\,dx$ converge $\iff \beta>-1$. Poiché, per $x\to+\infty$, $f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\beta}x^{\beta}$, allora l'integrale $\int_4^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta<-1$. Ne segue che l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge per ogni $\beta\in\mathbb{R}$.

(12) Sia $f(x) := \frac{\cos^2 x+3}{x^{\beta}+\sqrt{x}}$. Per $x\to 0^+$, si ha:

(a) se $\beta>\frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{4\,(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta>\frac{1}{2}$,

(b) se $\beta=\frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{4\,(1+o(1))}{2\sqrt{x}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge,

(c) se $\beta<\frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{4\,(1+o(1))}{x^{\beta}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta<\frac{1}{2}$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta\in\mathbb{R}$.

(13) Si ha $\int_0^{+\infty}\left(e^{-x}+\frac{x^{2\beta}+1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx + \int_0^{+\infty} x^{2\beta-1/2}\,dx + \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. Ora, il primo integrale converge, la convergenza del secondo integrale dipende da β, ma il terzo integrale non converge. Poiché sono tre addendi positivi, la somma dei tre integrali non converge, per ogni $\beta\in\mathbb{R}$.

(14) Sia $f(x) := \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^{\beta}}\right)}{2+\sqrt{x}}$. Per $x\to 0^+$, si ha:

(a) se $\beta>0$, $f(x) = \frac{\pi}{4}\,(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta>0$,

(b) se $\beta=0$, $f(x) = \frac{\pi}{8}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge,

(c) se $\beta<0$, $f(x) = \frac{x^{-\beta}\,(1+o(1))}{2\,(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta<0$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta\in\mathbb{R}$. Per $x\to+\infty$, si ha:

(d) se $\beta>0$, $f(x) = \frac{\frac{1}{x^{\beta}}\,(1+o(1))}{x^{1/2}\,(1+o(1))} = \frac{1}{x^{\beta+1/2}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta+1/2>1 \iff \beta>\frac{1}{2}$,

(e) se $\beta=0$, $f(x) = \frac{\frac{\pi}{4}}{x^{1/2}\,(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge,

(f) se $\beta<0$, $f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}\,(1+o(1))}{x^{1/2}\,(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge per ogni $\beta<0$.

Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta > \frac{1}{2}$. Allora, l'integrale proposto converge $\iff \beta > \frac{1}{2}$.

(15) Sia $f(x) := \frac{|\sin\frac{1}{\sqrt{x}}|^\beta}{\sqrt{x}\log(1+\sqrt[3]{x})}$. Per $x \to 0^+$, si ha $0 \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+\sqrt[3]{x})} = \frac{1}{x^{5/6}(1+o(1))}$, da cui segue che l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta \ge 0$. Per $x \to +\infty$, si ha:

(a) se $\beta > 0$, $f(x) = \frac{\frac{1}{x^{\beta/2}}(1+o(1))}{\frac{1}{3}x^{1/2}\log x(1+o(1))} = \frac{3}{x^{(\beta+1)/2}\log x}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff (\beta+1)/2 > 1 \iff \beta > 1$,

(b) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{3}{x^{1/2}\log x}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta > 1$. Allora, l'integrale proposto converge $\iff \beta > 1$.

(16) Sia $f(x) := \frac{x(1-\cos x)e^{-x}}{\operatorname{arctg}(x^\beta)}$. Per $x \to 0^+$, si ha:

(a) se $\beta > 0$, $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3\,(1+o(1))}{x^\beta(1+o(1))} = \frac{1}{2x^{\beta-3}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\iff \beta - 3 < 1 \iff \beta < 4$,

(b) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3\,(1+o(1))}{\frac{\pi}{4}}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge,

(c) se $\beta < 0$, $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3\,(1+o(1))}{\frac{\pi}{2}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta < 0$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\iff \beta < 4$. Per $x \to +\infty$, si ha $0 \le f(x) \le \frac{xe^{-x}}{\operatorname{arctg}(x^\beta)} =: g(x)$ e

(d) se $\beta > 0$, $g(x) = \frac{xe^{-x}}{x^\beta(1+o(1))} = o\big(\frac{1}{x^2}\big)$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta > 0$,

(e) se $\beta = 0$, $g(x) = \frac{xe^{-x}}{\frac{\pi}{4}} = o\big(\frac{1}{x^2}\big)$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge,

(f) se $\beta < 0$, $g(x) = \frac{xe^{-x}}{\frac{\pi}{2}(1+o(1))} = o\big(\frac{1}{x^2}\big)$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta < 0$.

Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Allora, l'integrale proposto converge $\iff \beta < 4$.

(17) Sia $f(x) := \frac{2x+\sin(x^\beta)}{e^x-\cos(x^\beta)}$. Per $x \to 0^+$, e $\beta > 0$, $f(x) = \frac{2x+x^\beta+o(x^\beta)}{1+x+o(x)-1+\frac{1}{2}x^{2\beta}+o(x^{2\beta})}$, per cui si ha:

(a) se $\beta > 1$, $f(x) = \frac{2x(1+o(1))}{x(1+o(1))} = 2(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta > 1$,

(b) se $\beta = 1$, $f(x) = \frac{3x(1+o(1))}{x(1+o(1))} = 3(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge ,

(c) se $\frac{1}{2} < \beta < 1$, $f(x) = \frac{x^\beta(1+o(1))}{x(1+o(1))} = \frac{1}{x^{1-\beta}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\iff 1-\beta < 1 \iff \beta > 0$,

(d) se $\beta = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{x^{1/2}(1+o(1))}{\frac{3}{2}x(1+o(1))} = \frac{2}{3}\frac{1}{x^{1/2}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge,

(e) se $0 < \beta < \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{x^\beta(1+o(1))}{\frac{1}{2}x^{2\beta}(1+o(1))} = \frac{2}{x^\beta}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\iff \beta < 1$,

(f) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{2x+\sin 1}{e^x - \cos 1} = \frac{\sin 1}{e - \cos 1}(1 + o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta \geq 0$. Per $x \to +\infty$, $f(x) = \frac{2x(1+o(1))}{e^x(1+o(1))}$, per cui l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta \geq 0$. Allora, l'integrale proposto converge per ogni $\beta \geq 0$.

$\square$

Svolgimento esercizio 8

(1) Sia $f(x) := \dfrac{\sqrt{x}}{x^\beta(x-2)}$. Per $x \to 0^+$, si ha $f(x) = -\dfrac{1}{2x^{\beta-1/2}}(1+o(1))$, per cui $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\iff \beta - \frac{1}{2} < 1 \iff \beta < 3/2$.

Posto $\beta = 1$, determiniamo una primitiva $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x}} \overset{(a)}{=} \int \frac{2z\,dz}{z(z^2-2)} \overset{(b)}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\int \Big(\frac{1}{z-\sqrt{2}} - \frac{1}{z+\sqrt{2}}\Big)\,dz = \frac{\sqrt{2}}{2}\log\Big|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\Big| + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\log\Big|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\Big| + C$, dove si è usata in (a) la sostituzione $\sqrt{x} = z \implies x = z^2, dx = 2z\,dz$, e in (b) la decomposizione $\dfrac{2}{z^2-2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big(\dfrac{1}{z-\sqrt{2}} - \dfrac{1}{z+\sqrt{2}}\Big)$. Allora $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+}\Big[\frac{\sqrt{2}}{2}\log\Big|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\Big|\Big]_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\log\Big|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\Big| - \frac{\sqrt{2}}{2}\log\Big|\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}\Big|\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

(2) Sia $f(x) := \Big(\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{(x-1)^2}\Big)^\beta \frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}}$. Poiché, per $x \to 1^+$, $f(x) = \frac{(\frac{\pi}{4})^\beta(1+o(1))}{(x-1)^{2\beta}}\frac{1}{(x-1)^{1/3}(1+o(1))} = (\frac{\pi}{4})^\beta\frac{1}{(x-1)^{2\beta+1/3}}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_0^4 f(x)\,dx$ converge $\iff 2\beta + 1/3 < 1 \iff \beta < \frac{1}{3}$. Poiché, per $x \to +\infty$, $f(x) = \frac{\frac{1}{x^\beta}(1+o(1))}{x^{2\beta+4/3}(1+o(1))} = \frac{1}{x^{3\beta+4/3}}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_4^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff 3\beta + 4/3 > 1 \iff \beta > -\frac{1}{9}$. Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta \in (-\frac{1}{9}, \frac{1}{3})$.

Posto $\beta = 0$, determiniamo una primitiva $\int \frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{3y\,dy}{y^3+1} \overset{(b)}{=} \int \Big(-\frac{1}{y+1} + \frac{1}{2}\frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{y^2-y+1}\Big)\,dy + C = -\log|y+1| + \frac{1}{2}\log(y^2-y+1) + 2\int \frac{dy}{1+\big(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\big)^2} + C = \frac{1}{2}\log\big(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1\big) - \log|1+\sqrt[3]{x-1}| + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt[3]{x-1} = y \implies x = y^3+1$, $dx = 3y^2\,dy$, e in (b) la decomposizione $\frac{3y}{y^3+1} = -\frac{1}{y+1} + \frac{y+1}{y^2-y+1} = -\frac{1}{y+1} + \frac{1}{2}\frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{y^2-y+1}$.

Allora $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \lim\limits_{c\to 1^+}\Big[\frac{1}{2}\log\big(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1}+1\big) - \log|1+\sqrt[3]{x-1}| + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}}\Big]_c^2 +$

$+ \lim\limits_{\omega\to+\infty}\Big[\frac{1}{2}\log\big(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1}+1\big) - \log|1+\sqrt[3]{x-1}| + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}}\Big]_2^\omega =$

$= -\lim\limits_{c\to 1^+}\Big(\frac{1}{2}\log\big(\sqrt[3]{(c-1)^2} - \sqrt[3]{c-1}+1\big) - \log|1+\sqrt[3]{c-1}| + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{c-1}-1}{\sqrt{3}}\Big) +$

$+ \lim\limits_{\omega\to+\infty}\Big(\frac{1}{2}\log\big(\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - \sqrt[3]{\omega-1}+1\big) - \log|1+\sqrt[3]{\omega-1}| + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}\Big) =$

$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \lim\limits_{\omega\to+\infty}\Big(\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - \sqrt[3]{\omega-1}+1}{(1+\sqrt[3]{\omega-1})^2} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

(3) Sia $f(x) := \dfrac{x+2}{x(x^2+2)}\, e^{\beta x^2}$. Per $x \to +\infty$, si ha $f(x) = \dfrac{e^{\beta x^2}}{x^2}(1+o(1))$, per cui

(*a*) se $\beta > 0$, $f(x) \to +\infty$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge,

(*b*) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{1}{x^2}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge,

(*c*) se $\beta < 0$, $f(x) = o(\frac{1}{x^2})$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta < 0$.

Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta \leq 0$.

Posto $\beta = 0$, determiniamo una primitiva $\displaystyle\int \frac{x+2}{x(x^2+2)}\,dx \overset{(a)}{=} \int \Big(\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+2}\Big)\,dx = \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+2) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1} = \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$, dove si è usata in (*a*) la decomposizione $\dfrac{x+2}{x(x^2+2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x-1}{x^2+2}$.

Allora $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x(x^2+2)}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\Big[\frac{1}{2}\log\frac{x^2}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\Big]_1^{\omega} = \lim_{\omega\to+\infty}\Big(\frac{1}{2}\log\frac{\omega^2}{\omega^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(4) Sia $f(x) := \log(1+x^\beta)\,\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^2}\right)$. Per $x \to 0^+$, si ha:

(*a*) se $\beta > 0$, $f(x) = x^\beta\,(1+o(1))\frac{1}{x^2}(1+o(1)) = \frac{1}{x^{2-\beta}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\iff 2-\beta < 1 \iff \beta > 1$,

(*b*) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{\log 2}{x^2}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ non converge,

(*c*) se $\beta < 0$, $f(x) = \beta\log x(1+o(1))\frac{1}{x^2}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ non converge per ogni $\beta < 0$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\iff \beta > 1$. Per $x \to +\infty$, si ha:

(*d*) se $\beta > 0$, $f(x) = \beta\log x(1+o(1))\frac{2}{x^2}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta > 0$,

(*e*) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{2\log 2}{x^2}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge,

(*f*) se $\beta < 0$, $f(x) = x^\beta(1+o(1))\frac{2}{x^2}(1+o(1)) = \frac{2}{x^{2-\beta}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff 2-\beta > 1 \iff \beta < 1$.

Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Allora, l'integrale proposto converge $\iff \beta > 1$.

Posto $\beta = 2$, determiniamo una primitiva $\int \log(1+x^2)\,\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^2}\right)dx \overset{(a)}{=} -\frac{2x+3}{x(x+3)}\,\log(1+x^2) + \int \frac{2x}{x^2+1}\cdot\frac{2x+3}{x(x+3)}\,dx = -\frac{2x+3}{x(x+3)}\,\log(1+x^2) + 2\int \frac{2x+3}{(x+3)(x^2+1)}\,dx \overset{(b)}{=} -\frac{2x+3}{x(x+3)}\,\log(1+x^2) + 2\int\left(-\frac{3}{10}\,\frac{1}{x+3} + \frac{3}{20}\,\frac{2x}{x^2+1} + \frac{11}{10}\,\frac{1}{x^2+1}\right)dx = -\frac{2x+3}{x(x+3)}\,\log(1+x^2) - \frac{3}{5}\log|x+3| + \frac{3}{10}\log(x^2+1) + \frac{11}{5}\operatorname{arctg} x + C$, dove si

sono usate in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log(1+x^2), & f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \\ g'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^2}, & g(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = -\frac{2x+3}{x(x+3)}, \end{cases}$
in (b) la decomposizione $\frac{2x+3}{(x+3)(x^2+1)} = -\frac{3}{10}\,\frac{1}{x+3} + \frac{1}{10}\,\frac{3x+11}{x^2+1} = -\frac{3}{10}\,\frac{1}{x+3} + \frac{3}{20}\,\frac{2x}{x^2+1} + \frac{11}{10}\,\frac{1}{x^2+1}$.
Allora $\int_0^\infty \log(1+x^2)\,\big(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^2}\big)\,dx =$
$= \lim_{c\to 0^+} \big[-\frac{2x+3}{x(x+3)}\,\log(1+x^2) - \frac{3}{5}\log|x+3| + \frac{3}{10}\log(x^2+1) + \frac{11}{5}\operatorname{arctg} x\big]_c^2 +$
$+ \lim_{\omega\to+\infty} \big[-\frac{2x+3}{x(x+3)}\,\log(1+x^2) - \frac{3}{5}\log|x+3| + \frac{3}{10}\log(x^2+1) + \frac{11}{5}\operatorname{arctg} x\big]_2^\omega =$
$= \lim_{c\to 0^+} \Big(\frac{2c+3}{c(c+3)}\,\log(1+c^2) + \frac{3}{5}\log|c+3| - \frac{3}{10}\log(c^2+1) - \frac{11}{5}\operatorname{arctg} x\Big) +$
$+ \lim_{\omega\to+\infty} \Big(-\frac{2\omega+3}{\omega(\omega+3)}\,\log(1+\omega^2) - \frac{3}{5}\log|\omega+3| + \frac{3}{10}\log(\omega^2+1) + \frac{11}{5}\operatorname{arctg}\omega\Big) =$
$= \frac{3}{5}\log 3 + \lim_{\omega\to+\infty} \big(-\frac{2\omega+3}{\omega(\omega+3)}\,\log(1+\omega^2) + \frac{3}{10}\log\frac{\omega^2+1}{(\omega+3)^2} + \frac{11}{5}\operatorname{arctg}\omega\big) = \frac{3}{5}\log 3 + \frac{11}{10}\pi.$

(5) Sia $f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}(x+7x^\beta)}$. Per $x \to 0^+$, si ha:

- (a) se $\beta > 1$, $f(x) = \frac{1}{-\sqrt[3]{2}x}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ non converge per ogni $\beta > 1$,
- (b) se $\beta = 1$, $f(x) = \frac{1}{-8\sqrt[3]{2}x}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ non converge,
- (c) se $\beta < 1$, $f(x) = \frac{1}{-7\sqrt[3]{2}x^\beta}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta < 1$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ converge $\iff$ $\beta < 1$. Per $x \to 1$, si ha $f(x) = \frac{1}{(2+7\cdot 2^\beta)\sqrt[3]{x-1}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_{1/2}^3 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Per $x \to +\infty$, si ha:

- (d) se $\beta > 1$, $f(x) = \frac{1}{7x^{\beta+1/3}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff$ $\beta + 1/3 > 1$ $\iff$ $\beta > \frac{2}{3}$,
- (e) se $\beta = 1$, $f(x) = \frac{1}{8x^{4/3}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ converge,
- (f) se $\beta < 1$, $f(x) = \frac{1}{x^{4/3}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta < 1$.

Ne segue che l'integrale $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Allora, l'integrale proposto converge $\iff$ $\beta < 1$.

Posto $\beta = 0$, determiniamo una primitiva $\int \frac{1}{(x+7)\sqrt[3]{x-1}}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{3y\,dy}{y^3+8} \overset{(b)}{=} \int \big(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{y+2} + \frac{1}{4}\,\frac{2y-2}{y^2-2y+4} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{y^2-2y+4}\big)\,dy + C = -\frac{1}{2}\,\log|y+2| + \frac{1}{4}\log(y^2-2y+4) + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+\big(\frac{y-1}{\sqrt{3}}\big)^2} + C = \frac{1}{4}\,\log\big(\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1}+4\big) - \frac{1}{2}\,\log|2+\sqrt[3]{x-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt[3]{x-1} = y \implies x = y^3+1$, $dx = 3y^2\,dy$, e in (b) la decomposizione $\frac{3y}{y^3+8} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{y+2} + \frac{1}{2}\,\frac{y+2}{y^2-2y+4} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{y+2} + \frac{1}{4}\,\frac{2y-2}{y^2-2y+4} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{y^2-2y+4}$.
Allora $\int_0^\infty \frac{1}{(x+7)\sqrt[3]{x-1}}\,dx =$
$= \lim_{a\to 1^-} \big[\frac{1}{4}\,\log\big(\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1}+4\big) - \frac{1}{2}\,\log|2+\sqrt[3]{x-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}}\big]_0^a +$
$+ \lim_{b\to 1^+} \big[\frac{1}{4}\,\log\big(\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1}+4\big) - \frac{1}{2}\,\log|2+\sqrt[3]{x-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}}\big]_b^2 +$

$$+\lim_{\omega\to+\infty}\left[\frac{1}{4}\,\log\big(\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt[3]{x-1}+4\big)-\frac{1}{2}\,\log|2+\sqrt[3]{x-1}|+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}}\right]_2^{\omega}=$$
$$=\lim_{a\to1^-}\left(\frac{1}{4}\,\log\big(\sqrt[3]{(a-1)^2}-2\sqrt[3]{a-1}+4\big)-\frac{1}{2}\,\log|2+\sqrt[3]{a-1}|+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{a-1}-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{4}\log 7+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+$$
$$-\lim_{b\to1^+}\left(\frac{1}{4}\,\log\big(\sqrt[3]{(b-1)^2}-2\sqrt[3]{b-1}+4\big)-\frac{1}{2}\,\log|2+\sqrt[3]{b-1}|+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{b-1}-1}{\sqrt{3}}\right)+$$
$$+\lim_{\omega\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\log\big(\sqrt[3]{(\omega-1)^2}-2\sqrt[3]{\omega-1}+4\big)-\frac{1}{2}\,\log|2+\sqrt[3]{\omega-1}|+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}\right)=$$
$$=-\frac{1}{4}\log 7+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\pi\sqrt{3}}{12}+\lim_{\omega\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\log\frac{\sqrt[3]{(\omega-1)^2}-2\sqrt[3]{\omega-1}+4}{(2+\sqrt[3]{\omega-1})^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{4}\,\log 7+$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\pi\sqrt{3}}{12}+\frac{\pi\sqrt{3}}{4}=-\frac{1}{4}\log 7+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

□