Analisi Matematica I
Calcolo differenziale e applicazioni (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x\to 0} |x| = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(2) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} |x|(1+o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(3) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \sin x = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(4) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\sqrt[3]{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}(1+o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(5) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\sin\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\sqrt[3]{x}(1+o(1)) = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}(1+o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(6) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|e^x-1|\sin\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}\sin\sqrt[3]{x}(1+o(1)) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}\sqrt[3]{x}(1+o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(7) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x\log(1+|x|)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|(1+o(1))} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}|x|(1+o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(8) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x\log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(1+o(1))} = 1$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(9) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|\log(1+x)|^{1/2}|x|^{3/4}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{5/4}(1+o(1))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}|x|^{1/4}(1+o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(10) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(11) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{|x|} = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(12) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x^2} = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(13) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|\sin^3 x|}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{3/2}(1+o(1))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}(1+o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(14) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x}(1+o(1)) = \pm 1$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$, e tale punto è angoloso.

(15) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x}\frac{1}{\sqrt{|x|}} = \pm\infty$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$, e tale punto è di cuspide.

(16) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sin^2|x|}{x\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|^2(1+o(1))}{x^{7/3}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}(1+o(1)) = \pm\infty$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$, e tale punto è di cuspide.

(17) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|1-e^x|}{x\sqrt[5]{x}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|(1+o(1))}{x\sqrt[5]{x}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x}\frac{1}{\sqrt[5]{x}}(1+o(1)) = +\infty$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$, e tale punto è a tangente verticale.

(18) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|1-e^x|}}{x\sqrt[5]{|x|}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|x|}(1+o(1))}{x\sqrt[5]{|x|}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x}\frac{1}{|x|^{7/10}}(1+o(1)) = \pm\infty$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$, e tale punto è di cuspide.

(19) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \sin\frac{1}{x} = \nexists$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$.

$\square$

Svolgimento esercizio 2

(1) Si ha $f(x) = e^{\frac{1}{x}\log x}$, per cui $f'(x) = e^{\frac{1}{x}\log x}\frac{1-\log x}{x^2}$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$, e quindi la retta tangente è $y = 1 + (x-1) = x$.

(2) Si ha $f'(x) = \frac{1}{x\log x}$, $f(e) = 0$, $f'(e) = \frac{1}{e}$, e quindi la retta tangente è $y = \frac{1}{e}(x-e) = \frac{x}{e} - 1$.

(3) Si ha $f'(x) = \frac{1}{x(1+\log x)^2}$, $f(e) = \frac{1}{2}$, $f'(e) = \frac{1}{4e}$, e quindi la retta tangente è $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4e}(x-e) = \frac{x}{4e} + \frac{1}{4}$.

(4) Si ha $f'(x) = 4xe^{2x^2+1}\cos(e^{2x^2+1})$, $f(1) = \sin(e^3)$, $f'(1) = 4e^3\cos(e^3)$, e quindi la retta tangente è $y = \sin(e^3) + 4e^3\cos(e^3)(x-1)$.

(5) Si ha $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-(\log x+1)^2}}$, $f(\frac{1}{e}) = 0$, $f'(\frac{1}{e}) = e$, e quindi la retta tangente è $y = e(x-\frac{1}{e}) = ex-1$.

(6) Si ha $f'(x) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\arcsin x)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}$, $f(\frac{1}{2}) = \log\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{2}{3}$, e quindi la retta tangente è $y = \log\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}(x-\frac{1}{2}) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} + \log\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(7) Si ha $f'(x) = \frac{\cosh x}{\sqrt{1+(1+\sinh x)^2}}$, $f(0) = \operatorname{arsinh} 1 = \log 2$, $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, e quindi la retta tangente è $y = \log 2 + \frac{x}{\sqrt{2}}$.

□

Svolgimento esercizio 3

(1) Si ha $f'(x) = 3(x^2+x-2)$ e $f'(x) = 0 \iff x = -2 \notin A^o \ \vee x = 1 \in A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 3, 1\}$. Si ha $f(-2) = 11$, $f(3) = \frac{47}{2} = \max_A f$, $f(1) = -\frac{5}{2} = \min_A f$.

(2) Si ha $f'(x) = \begin{cases} 3(x^2+x-2), & 0 < x < 3, \\ -3(x^2-x+2), & -2 < x < 0, \end{cases}$ e $f'(x) = 0 \iff x = 1 \in A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 3, 0, 1\}$. Si ha $f(-2) = 27 = \max_A f$, $f(3) = \frac{47}{2}$, $f(0) = 1$,$f(1) = -\frac{5}{2} = \min_A f$.

(3) Si ha $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 0 < x < 2, \\ -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & -1 < x < 0, \end{cases}$ per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-1, 2, 0\}$. Si ha $f(-1) = 1$, $f(2) = \sqrt[3]{2} = \max_A f$, $f(0) = 0 = \min_A f$.

(4) Si ha $f'(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0, \\ -2x, & -2 < x < 0, \end{cases}$ per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 1, 0\}$. Si ha $f(-2) = -4 = \min_A f$, $f(1) = 1 = \max_A f$, $f(0) = 0$.

(5) Si ha $f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}, & 0 < x < 3, \\ \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}, & -2 < x < 0, \end{cases}$ e $f'(x) = 0 \iff x = 1+\sqrt{2} \in A^o \ \vee x = -1-\sqrt{2} \notin A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\left\{-2, 3, 0, 1+\sqrt{2}\right\}$. Si ha $f(-2) = \frac{6}{5}$, $f(3) = \frac{6}{5}$, $f(0) = 0 = \min_A f$, $f(1+\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{2} = \max_A f$.

(6) Si ha $f'(x) = \begin{cases} \frac{3(x^2+4x-4)}{(x^2+4)^2}, & 0 < x < 3, \\ \frac{-6(x^2-2)}{(x^2+4)^2}, & -2 < x < 0, \end{cases}$ e $f'(x) = 0 \iff x = \sqrt{8} - 2 \in A^o \ \vee x = -\sqrt{2} \in A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 2, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{8} - 2\}$. Si ha $f(-2) = \frac{1}{4}$, $f(2) = -\frac{1}{2}$, $f(-1) = \frac{2}{5} = \max_A f$, $f(-\sqrt{2}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(\sqrt{8} - 2) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{2} = \min_A f$.
□

Svolgimento esercizio 4

(1) Sia $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{2x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = 2 + o(1)$, per cui $y = 2$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{4x(x^2+1)-2x(2x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{(x^2+1)^2} \geq 0 \iff x \geq 0$.

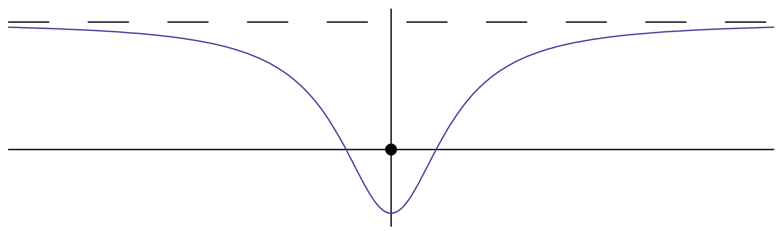

Figura 1: Grafico per l'esercizio 4 (1)

Allora, $x = 0$ è un punto di minimo relativo. Si ha $f(0) = -1$.
Il grafico è riportato in figura 1.

(2) Sia $f(x) = \frac{x^2+2x}{2x^2-1}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{x^2(1+o(1))}{2x^2(1+o(1))} = \frac{1}{2}(1 + o(1))$, per cui $y = \frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$. Per $x \to (-\frac{1}{\sqrt{2}})^\pm$, si ha $f(x) = \frac{\frac{1}{2}-\sqrt{2}+o(1)}{(-2+o(1))(\sqrt{2}x+1)} = \frac{2\sqrt{2}-1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}x+1}(1 + o(1)) \to \pm\infty$. Per $x \to (\frac{1}{\sqrt{2}})^\pm$, si ha $f(x) = \frac{\frac{1}{2}+\sqrt{2}+o(1)}{(2+o(1))(\sqrt{2}x-1)} = \frac{2\sqrt{2}+1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}x-1}(1 + o(1)) \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{(2x+2)(2x^2-1)-4x(x^2+2x)}{(2x^2-1)^2} = \frac{-2(2x^2+x+1)}{(2x^2-1)^2} \leq 0 \iff x \in \operatorname{dom} f$.

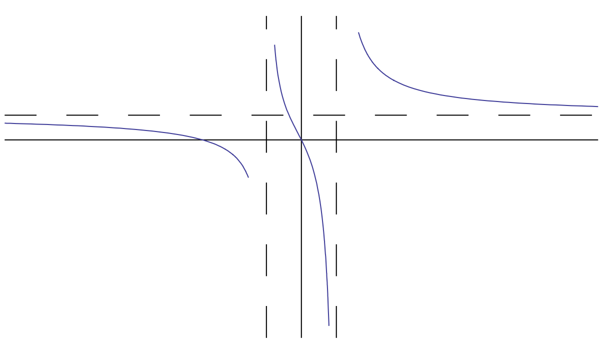

Figura 2: Grafico per l'esercizio 4 (2)

Il grafico è riportato in figura 2.

(3) Sia $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = 1 + o(1)$, per cui $y = 1$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}, & x > 0, \\ \frac{x^2+2x-1)}{(x^2+1)^2}, & x < 0, \end{cases}$ per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1-\sqrt{2}] \cup (0, 1+\sqrt{2}]$. Si ha poi $f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = \pm 1$.

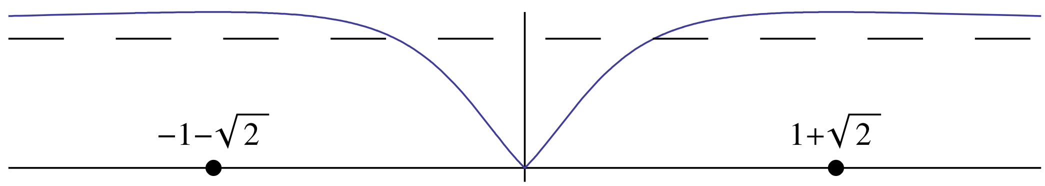

Figura 3: Grafico per l'esercizio 4 (3)

Allora, $x = \pm(1+\sqrt{2})$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = 0$ è un punto di minimo relativo ed è angoloso. Si ha $f(0) = 0$, $f\big(\pm(1+\sqrt{2})\big) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.
Il grafico è riportato in figura 3.

(4) Sia $f(x) = x^2 - 3x^{2/3}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Si ha, per $x \to \pm\infty$, $f(x) = x^2(1+o(1))$, per cui f non ha né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = 2x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2(x^{4/3}-1)}{\sqrt[3]{x}} \geq 0 \iff x \in [-1, 0) \cup [1, +\infty)$. Si ha anche $f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{2(x^{4/3}-1)}{\sqrt[3]{x}} = \mp\infty$.

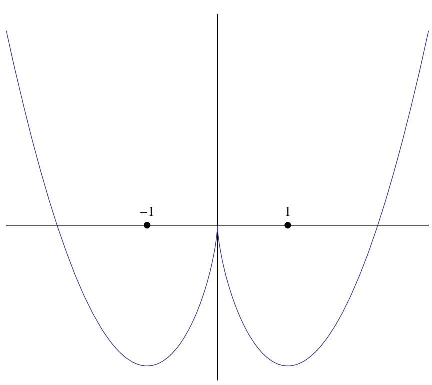

Figura 4: Grafico per l'esercizio 4 (4)

Allora, $x = -1$ e $x = 1$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo e di cuspide. Si ha $f(0) = 0$, $f(\pm 1) = -2$.
Il grafico è riportato in figura 4.

(5) Sia $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+1}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+1} = \frac{1}{x^{2/3}(1+o(1))} = o(1)$, per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$. Per $x \to (-1)^{\pm}$, si ha $f(x) = -\frac{1}{x+1}(1+o(1)) \to \mp\infty$, per cui $x = -1$ è asintoto verticale di f.

Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, si ha $f'(x) = \frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}(x+1) - \sqrt[3]{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-2x}{3x^{2/3}(x+1)^2} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \frac{1}{2}]$. Si ha poi $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3x^{2/3}} 1 + o(1) = +\infty$.

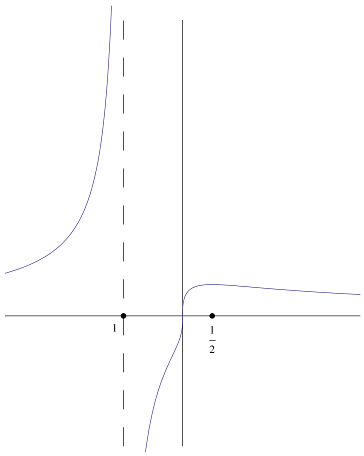

Figura 5: Grafico per l'esercizio 4 (5)

Allora, $x = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo relativo. Si ha $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.
Il grafico è riportato in figura 5.

(6) Sia $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} = x\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}} = x(1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})) = x - 1 + o(1)$, per cui $y = x - 1$ è asintoto obliquo di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, si ha $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x^3 - 3x^2)^{2/3}} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup [2, 3) \cup (3, +\infty)$. Si ha poi $f'_{\pm}(0) = \lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{-2x(1+o(1))}{(-3x^2)^{2/3}(1+o(1))} = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{2}{\sqrt[3]{9x}(1+o(1))} = \pm\infty$, cioè $x = 0$ è un punto di cuspide, e $f'_{\pm}(3) = \lim_{x \to 3^{\pm}} f'(x) = \lim_{x \to 3^{\pm}} \frac{3+o(1)}{9^{4/3}(x-3)^{2/3}(1+o(1))} = +\infty$, cioè $x = 3$ è un punto di flesso a tangente verticale.

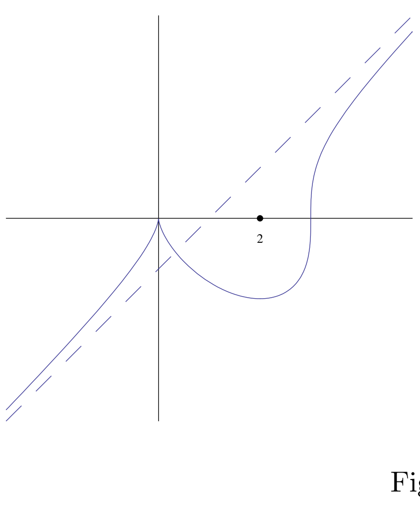

Figura 6: Grafico per l'esercizio 4 (6)

Allora, $x=2$ è un punto di minimo relativo, mentre $x=0$ è un punto di massimo relativo. Si ha $f(0)=f(3)=0$, e $f(2)=-\sqrt[3]{4}$.
Il grafico è riportato in figura 6.

(7) Sia $f(x)=\sqrt{\frac{x^4}{|3-x^2|}-2}$. Si ha $\operatorname{dom} f=(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},-\sqrt{\sqrt{7}-1}]\cup[\sqrt{\sqrt{7}-1},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$, f è continua, e pari. Per $x\to+\infty$, si ha $f(x)=\sqrt{\frac{x^4-2x^2+6}{x^2-3}}=\sqrt{\frac{x^4-3x^2+x^2+6}{x^2-3}}=\sqrt{x^2+\frac{x^2+6}{x^2-3}}=x\sqrt{1+\frac{x^2+6}{x^2(x^2-3)}}=x\big(1+\frac{x^2+6}{2x^2(x^2-3)}\big)=x+o(1)$, per cui $y=x$ è asintoto obliquo di f, per $x\to+\infty$, e, di conseguenza, $y=-x$ è asintoto obliquo di f, per $x\to-\infty$. Per $x\to\sqrt{3}$, si ha $f(x)=\sqrt{\frac{9}{2\sqrt{3}|x-\sqrt{3}|}}(1+o(1))\to+\infty$, per cui $x=\sqrt{3}$ è asintoto verticale di f.

Inoltre, per ogni $x\in\operatorname{dom} f\cap(0,+\infty)$, si ha $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{x^4+2x^2-6}{3-x^2}}, & x\in[\sqrt{\sqrt{7}-1},\sqrt{3}),\\ \sqrt{\frac{x^4-2x^2+6}{x^2-3}}, & x\in(\sqrt{3},+\infty),\end{cases}$ per cui $f'(x)=\begin{cases}\frac{x^3(6-x^2)}{(3-x^2)^{3/2}\sqrt{x^4+2x^2-6}}, & x\in(\sqrt{\sqrt{7}-1},\sqrt{3}),\\ \frac{x^3(x^2-6)}{(x^2-3)^{3/2}\sqrt{x^4-2x^2+6}}, & x\in(\sqrt{3},+\infty),\end{cases}$ per cui $f'(x)\geq 0 \iff x\in(\sqrt{\sqrt{7}-1},\sqrt{3})\cup(\sqrt{6},+\infty)$. Si ha poi $f'_+(\sqrt{\sqrt{7}-1})=\lim_{x\to(\sqrt{\sqrt{7}-1})^+}f'(x)=+\infty$.

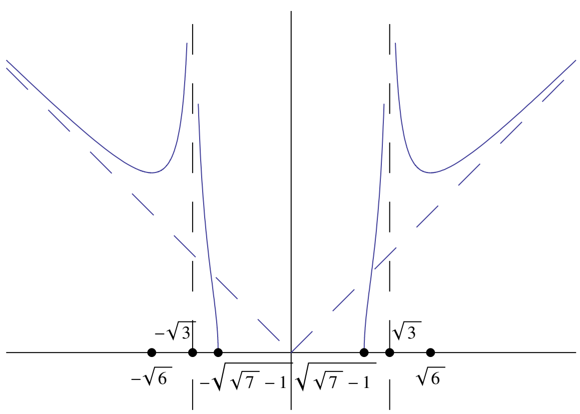

Figura 7: Grafico per l'esercizio 4 (7)

Allora, $x=\pm\sqrt{\sqrt{7}-1}$ e $x=\pm\sqrt{6}$ sono punti di minimo relativo. Si ha $f(\pm\sqrt{\sqrt{7}-1})=0$, $f(\pm\sqrt{6})=\sqrt{10}$.
Il grafico è riportato in figura 7.

(8) Sia $f(x)=x^2\big(\log\frac{x}{4}-1\big)^2$. Si ha $\operatorname{dom} f=(0,+\infty)$, f è continua, né pari né dispari. Per $x\to+\infty$, si ha $f(x)=x^2(\log x)^2(1+o(1))$, per cui f non ha né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo, per $x\to+\infty$. Per $x\to 0^+$, si ha $f(x)=x^2(\log x)^2(1+o(1))\to 0$.
Inoltre, per ogni $x\in(0,+\infty)$, si ha $f'(x)=2x\big(\log\frac{x}{4}-1\big)^2+x^2\cdot 2\big(\log\frac{x}{4}-1\big)\frac{1}{x}=2x\log\frac{x}{4}\big(\log\frac{x}{4}-1\big)\geq 0 \iff x\in(0,4)\cup(4e,+\infty)$. Si ha poi $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}2x(\log x)^2(1+o(1))=0$.
Allora, $x=4$ è un punto di massimo relativo, mentre $4e$ è un punto di minimo relativo. Si ha $f(4)=16$, $f(4e)=0$.
Il grafico è riportato in figura 8.

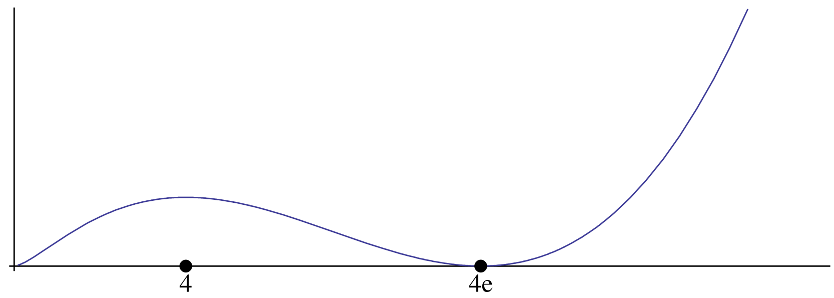

Figura 8: Grafico per l'esercizio 4 (8)

(9) Sia $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x+2}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} \frac{e^{-x^2}}{x+2} = \pm\infty$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{-x^2}}{x+2} = 0,$$

per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{-2x(x+2)-1}{(x+2)^2} e^{-x^2} = -\frac{2x^2+4x+1}{(x+2)^2} e^{-x^2} \geq 0 \iff x \in [-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

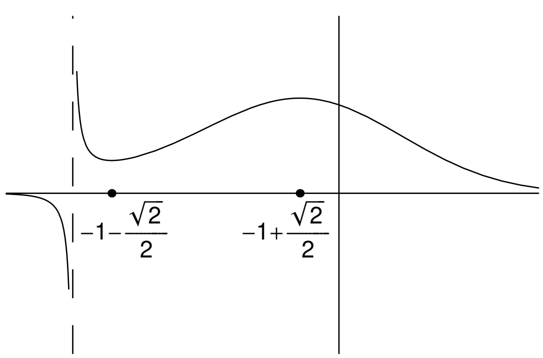

Figura 9: Grafico per l'esercizio 4 (9)

Allora, $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di massimo relativo.
Il grafico è riportato in figura 9.

(10) Sia $f(x) = (x^2 + 12x)e^{-2/x}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = x^2(1 + o(1))$, per cui f non ha né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo, per $x \to \pm\infty$. Per $x \to 0^+$, si ha $f(x) = 12xe^{-2/x}(1 + o(1)) \to 0$, mentre per $x \to 0^-$, si ha $f(x) = 12xe^{-2/x}(1 + o(1)) \to +\infty$, per cui $x = 0$ è asintoto verticale di f.
Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, si ha $f'(x) = (2x+12)e^{-2/x} + (x^2+12x) \cdot \frac{2}{x^2} e^{-2/x} = \frac{2e^{-2/x}}{x}(x^2+7x+12) \geq 0 \iff x \in (-4, -3) \cup (0, +\infty)$. Si ha poi $\lim_{x \to 0^+} f'(x) \stackrel{(z=1/x)}{=} \lim_{z \to +\infty} \frac{24z}{e^{2z}}(1 + o(1)) = 0$.
Allora, $x = -4$ è un punto di minimo relativo, mentre -3 è un punto di massimo relativo. Si ha $f(-4) = -32\sqrt{e}$, $f(-3) = -27e^{2/3}$.

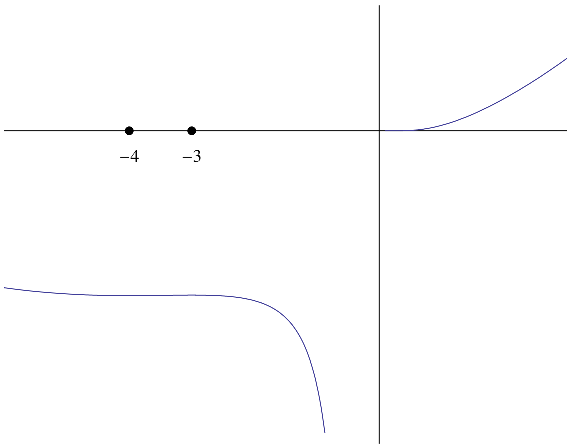

Figura 10: Grafico per l'esercizio 4 (10)

Il grafico è riportato in figura 10.

(11) Sia $f(x) = xe^{\frac{x}{x+1}}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} xe^{\frac{x}{x+1}} = \pm\infty \\
m_\pm :=\ &\lim_{x\to\pm\infty} \frac{xe^{\frac{x}{x+1}}}{x} = e \\
q_\pm :=\ &\lim_{x\to\pm\infty} xe^{\frac{x}{x+1}} - ex = \lim_{x\to\pm\infty} ex\Big(e^{\frac{x}{x+1}-1} - 1\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} ex\frac{-(1+o(1))}{x+1} = -e \\
&\lim_{x\to(-1)^+} xe^{\frac{x}{x+1}} = 0 \\
&\lim_{x\to(-1)^-} xe^{\frac{x}{x+1}} = -\infty,
\end{aligned}$$

per cui f ha asintoto obliquo $y = ex - e$, per $x \to \pm\infty$.

Inoltre, $f'(x) = \Big(1 + x\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}\Big)e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{x^2+3x+1}{(x+1)^2}e^{\frac{x}{x+1}} > 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

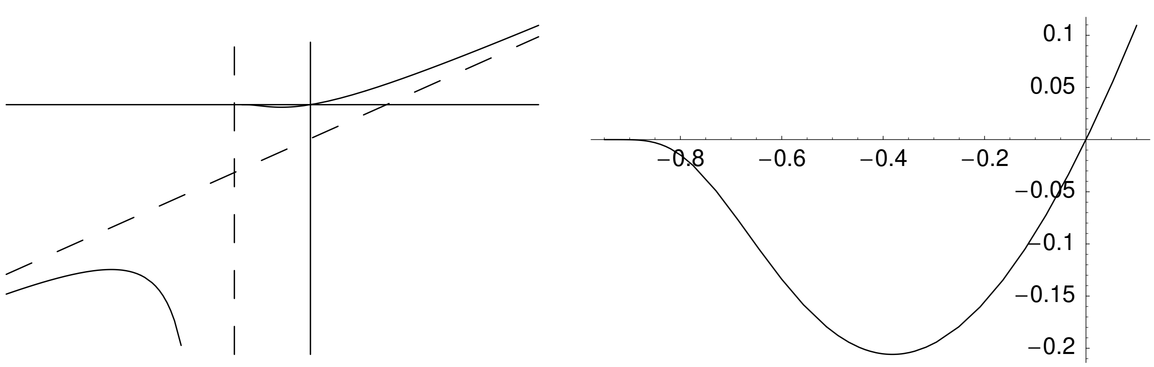

Figura 11: Grafico per l'esercizio 4 (11)

Quindi, f è crescente in $(-\infty, -\frac{3+\sqrt{5}}{2})$ e in $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$ e decrescente in $(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}, -1)$ e in $(-1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$.
Inoltre $x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo, con $f(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}$, e $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo, con $f(\frac{3-\sqrt{5}}{2}) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}e^{\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-1}}$. Inoltre, $\lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = 0$.
Il grafico è riportato in figura 11, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = -1$.

(12) Sia $f(x) = |x|e^{\frac{x}{x+1}}$. Poiché $|x|e^{\frac{x}{x+1}} = |xe^{\frac{x}{x+1}}|$, il grafico di f si ottiene da quello dell'esercizio 4 (11).
Osserviamo che l'asintoto obliquo di f, per $x \to -\infty$ ha equazione $y = -e(x-1)$. Infatti

$$m_- := \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|e^{\frac{x}{x+1}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -e^{1+o(1)} = -e$$
$$q_- := \lim_{x\to-\infty} |x|e^{\frac{x}{x+1}} + ex = \lim_{x\to-\infty} ex\Big(-e^{\frac{x}{x+1}-1} + 1\Big) = \lim_{x\to-\infty} -ex\frac{-(1+o(1))}{x+1} = e.$$

(13) Sia $f(x) = \arcsin\frac{x+1}{x-1}$. Allora $\operatorname{dom} f = \Big\{x \in \mathbb{R} : -1 \le \frac{x+1}{x-1} \le 1\Big\} = (-\infty, 0]$, in quanto

$$\begin{cases} \frac{2x}{x-1} \ge 0 \\ \frac{2}{x-1} \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-1 < 0 \\ x \le 0. \end{cases}$$

Inoltre, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to -\infty$, si ha $f(x) = \arcsin(1+o(1)) = \frac{\pi}{2} + o(1)$, per cui $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to -\infty$.
Inoltre,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}}\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{|x|}} < 0,$$

per ogni $x \in (-\infty, 0)$.

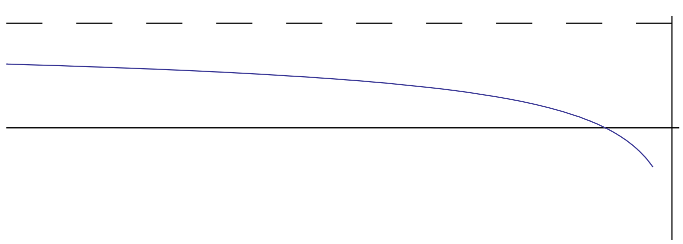

Figura 12: Grafico per l'esercizio 4 (13)

Allora, f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$. Si ha $f(0) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, e $f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{(x-1)\sqrt{|x|}} = -\infty$.
Il grafico è riportato in figura 12.

(14) Sia $f(x) = \arcsin\frac{1}{x^2-x}$. Allora $\operatorname{dom} f = \Big\{x \in \mathbb{R} : -1 \le \frac{1}{x^2-x} \le 1\Big\} = (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, in quanto

$$\begin{cases} \frac{1-x^2+x}{x^2-x} \le 0 \\ \frac{1+x^2-x}{x^2-x} \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2-x-1}{x^2-x} \ge 0 \\ \frac{x^2-x+1}{x^2-x} \ge 0 \end{cases} \overset{(a)}{\iff} \begin{cases} x^2-x-1 \ge 0 \\ x^2-x > 0 \end{cases}$$

dove in (a) si è usato $x^2 - x + 1 > 0$, sempre.
Inoltre, f è continua, né pari né dispari. Si ha $\lim_{x\to\pm\infty} \arcsin \frac{1}{x^2-x} = 0$, per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(x^2-x)^2}}} \frac{-(2x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{(1-2x)|x^2-x|}{(x^2-x)^2\sqrt{(x^2-x)^2-1}} = \frac{1-2x}{(x^2-x)\sqrt{(x^2-x)^2-1}},$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$.

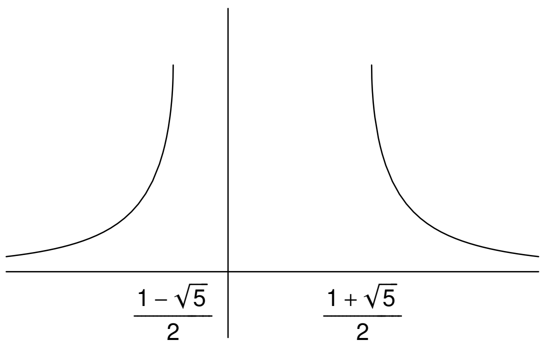

Figura 13: Grafico per l'esercizio 4 (14)

Allora, f è strettamente crescente in $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}]$, e strettamente decrescente in $[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$. Si ha $f(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, e

$$\lim_{x\to(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^-} f'(x) = \lim_{x\to(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^-} \frac{1-2x}{(x^2-x)\sqrt{(x^2-x)^2-1}} = +\infty$$
$$\lim_{x\to(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^+} f'(x) = \lim_{x\to(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^+} \frac{1-2x}{(x^2-x)\sqrt{(x^2-x)^2-1}} = -\infty,$$

in quanto $(x^2-x)^2 - 1 = (x^2-x-1)(x^2-x+1) = 0 \iff x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Il grafico è riportato in figura 13.

(15) Sia $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\log\left(\frac{x}{(x+3)|x+4|}\right)\right)$. Allora $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{(x+3)|x+4|} > 0\} = (-\infty, -4) \cup (-4, -3) \cup (0, +\infty)$. Inoltre, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} \log\left(\frac{1+o(1)}{|x|}\right) = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to-4} f(x) = \lim_{x\to-4} \operatorname{arctg}\big(-\log\big(|x+4|\big)(1+o(1))\big) = +\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to(-3)^-} f(x) = \lim_{x\to(-3)^-} \operatorname{arctg}\big(\log\big(-(x+3)\big)(1+o(1))\big) = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \operatorname{arctg}\big(\log x(1+o(1))\big) = -\frac{\pi}{2},$$

per cui $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.

Inoltre,

$$f'(x) = \frac{1}{1+\big(\log(\frac{x}{(x+3)|x+4|})\big)^2} \frac{(x+3)|x+4|}{x} \frac{(x+3)|x+4| - x(|x+4| + \operatorname{sgn}(x+4)(x+3))}{(x+3)^2(x+4)^2}$$
$$= \frac{\operatorname{sgn}(x+4)(12-x^2)}{x(x+3)|x+4|} \frac{1}{1+\big(\log(\frac{x}{(x+3)|x+4|})\big)^2} = \frac{12-x^2}{x(x+3)(x+4)} \frac{1}{1+\big(\log(\frac{x}{(x+3)|x+4|})\big)^2},$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -4) \cup [-2\sqrt{3}, -3) \cup (0, 2\sqrt{3}]$.

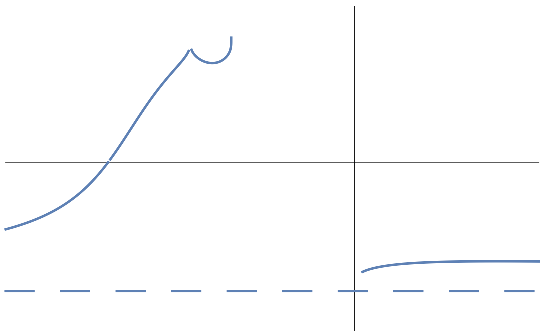

Figura 14: Grafico per l'esercizio 4 (15)

Allora, f è strettamente crescente in $(-\infty, -4]$, in $[-2\sqrt{3}, -3)$, e in $(0, 2\sqrt{3}]$, e strettamente decrescente in $[-4, -2\sqrt{3}]$, e in $[2\sqrt{3}, +\infty)$, mentre $x = -2\sqrt{3}$ è un punto di minimo locale, e $x = 2\sqrt{3}$ un punto di massimo locale, e si ha $f(-2\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\log(7+4\sqrt{3})$, $f(2\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\log(7-4\sqrt{3})$. Inoltre

$$\lim_{x\to(-4)^\pm} f'(x) = \lim_{x\to(-4)^\pm} \frac{-1+o(1)}{(x+4)\big(\log|x+4|\big)^2} = \mp\infty,$$
$$\lim_{x\to(-3)^-} f'(x) = \lim_{x\to(-3)^-} \frac{-1+o(1)}{(x+3)\big(\log|x+3|\big)^2} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1+o(1)}{x\big(\log|x+3|\big)^2} = +\infty.$$

Il grafico è riportato in figura 14.

(16) Sia $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)\right)$. Allora $\operatorname{dom} f = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$. Inoltre, f è

continua, dispari. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg}\big(x(1+o(1))\big) = \pm\frac{\pi}{2},\\
\lim_{x\to(-1)^-} f(x) &= \lim_{x\to(-1)^-} \operatorname{arctg}\Big(-(1+o(1))\exp\Big(\frac{1}{-2(x+1)(1+o(1))}\Big)\Big) = -\frac{\pi}{2},\\
\lim_{x\to(-1)^+} f(x) &= \lim_{x\to(-1)^+} \operatorname{arctg}\Big(-(1+o(1))\exp\Big(\frac{1}{-2(x+1)(1+o(1))}\Big)\Big) = 0,\\
\lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{x\to1^-} \operatorname{arctg}\Big((1+o(1))\exp\Big(\frac{1}{2(x-1)(1+o(1))}\Big)\Big) = 0,\\
\lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+} \operatorname{arctg}\Big((1+o(1))\exp\Big(\frac{1}{2(x-1)(1+o(1))}\Big)\Big) = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

per cui $y = \pm\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2e^{2/(x^2-1)}}\Big(1-\frac{2x^2}{(x^2-1)^2}\Big)e^{1/(x^2-1)} = \frac{x^4-4x^2+1}{(x^2-1)^2}\,\frac{e^{1/(x^2-1)}}{1+x^2e^{2/(x^2-1)}},$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{2+\sqrt{3}}] \cup [-\sqrt{2-\sqrt{3}}, \sqrt{2-\sqrt{3}}] \cup [\sqrt{2+\sqrt{3}}, +\infty)$.

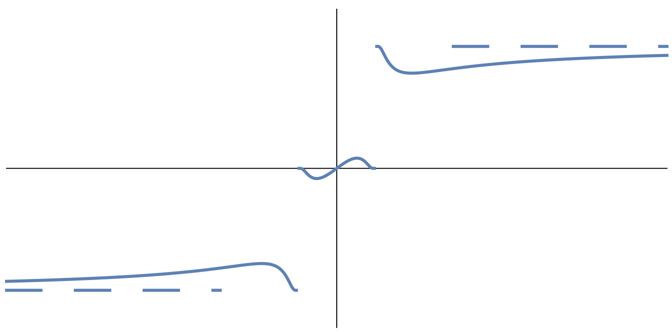

Figura 15: Grafico per l'esercizio 4 (16)

Allora, f è strettamente crescente in $(-\infty, -\sqrt{2+\sqrt{3}}]$, in $[-\sqrt{2-\sqrt{3}}, \sqrt{2-\sqrt{3}}]$, e in $[\sqrt{2+\sqrt{3}}, +\infty)$, e strettamente decrescente in $[-\sqrt{2+\sqrt{3}}, -1)$, in $(-1, -\sqrt{2-\sqrt{3}}]$, in $[\sqrt{2-\sqrt{3}}, 1)$, e in $(1, \sqrt{2+\sqrt{3}}]$, mentre $x = -\sqrt{2+\sqrt{3}}$ e $x = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ sono punti di massimo locale, e $x = -\sqrt{2-\sqrt{3}}$ e $x = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ sono punti di minimo locale, e si ha $f(\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}) = \pm\operatorname{arctg}\big(\sqrt{2+\sqrt{3}}\exp\big(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\big)\big)$,

$f(\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}) = \pm \operatorname{arctg}\big(\sqrt{2-\sqrt{3}}\exp\big(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\big)\big)$. Inoltre

$$\lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{-\exp\{\frac{1}{-2(x+1)(1+o(1))}\}(1+o(1))}{2(x+1)^2\exp\{\frac{1}{-(x+1)(1+o(1))}\}(1+o(1))} = 0,$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{-\exp\{\frac{1}{-2(x+1)(1+o(1))}\}(1+o(1))}{2(x+1)^2(1+o(1))} = 0,$$

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{-\exp\{\frac{1}{2(x-1)(1+o(1))}\}(1+o(1))}{2(x-1)^2(1+o(1))} = 0,$$

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{-\exp\{\frac{1}{2(x-1)(1+o(1))}\}(1+o(1))}{2(x-1)^2\exp\{\frac{1}{(x-1)(1+o(1))}\}(1+o(1))} = 0.$$

Il grafico è riportato in figura 15.

(17) Sia $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, f è continua, 2π-periodica, né pari né dispari. Per $x \to 0$, si ha $f(x) = \frac{1}{x}(1+o(1))$; per $x \to \frac{\pi}{2}$, si ha $f(x) = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+x-\frac{\pi}{2})}(1+o(1)) = -\frac{1}{\sin(x-\frac{\pi}{2})}(1+o(1)) = -\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}(1+o(1))$; per $x \to \pi$, si ha $f(x) = \frac{1}{\sin(\pi+x-\pi)}(1+o(1)) = -\frac{1}{\sin(x-\pi)}(1+o(1)) = -\frac{1}{x-\pi}(1+o(1))$; per $x \to \frac{3\pi}{2}$, si ha $f(x) = \frac{1}{\cos(\frac{3\pi 2}{+}x-\frac{3\pi}{2})}(1+o(1)) = \frac{1}{\sin(x-\frac{3\pi}{2})}(1+o(1)) = \frac{1}{x-\frac{3\pi}{2}}(1+o(1))$. Quindi $x = k\frac{\pi}{2}$ è asintoto verticale di f, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Inoltre, per ogni $x \in \operatorname{dom} f$, si ha $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{(\sin x-\cos x)(1+\frac{1}{2}\sin 2x)}{\sin^2 x\cos^2 x} \geq 0 \iff \sin x - \cos x \geq 0 \iff x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) \mod 2\pi$.

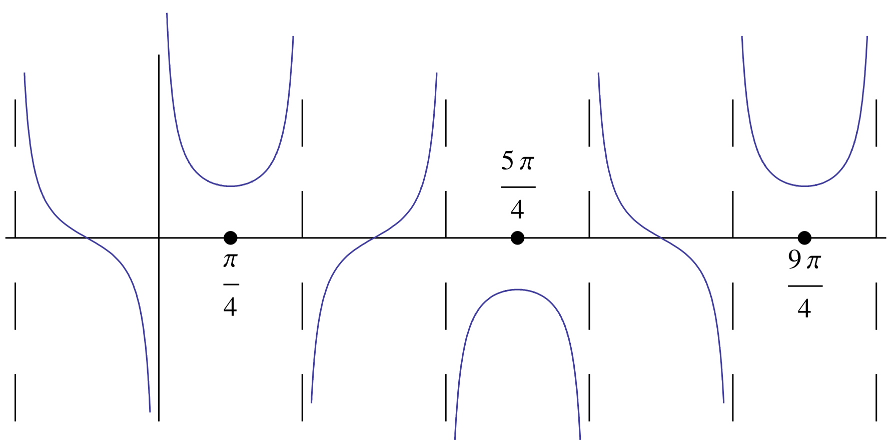

Figura 16: Grafico per l'esercizio 4 (17)

Allora, $x = \frac{\pi}{4}$ è un punto di minimo relativo, mentre $\frac{5\pi}{4}$ è un punto di massimo relativo. Si ha $f(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$, $f(\frac{5\pi}{4}) = -2\sqrt{2}$.
Il grafico è riportato in figura 16.

(18) Sia $f(x) = \sin\frac{1}{x^2+1}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Si ha $\lim_{x\to\pm\infty}\sin\frac{1}{x^2+1} = 0$, per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.

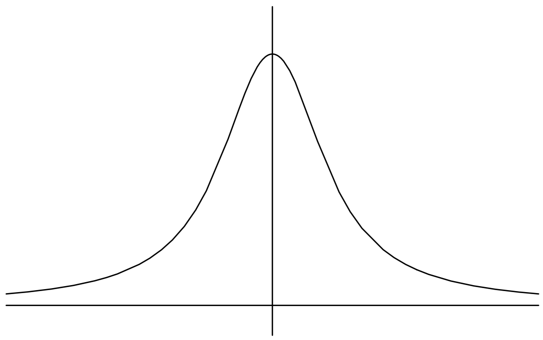

Figura 17: Grafico per l'esercizio 4 (18)

Inoltre, $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \cos \frac{1}{x^2+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0]$, in quanto $0 \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, per cui $\cos \frac{1}{x^2+1} > 0$.
Allora, $x = 0$ è un punto di massimo relativo, con $f(0) = \sin 1$.
Il grafico è riportato in figura 17.

(19) Sia $f(x) = \sin \frac{2x^2-1}{x^2+1}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \sin \frac{2x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = \sin 2 + o(1)$, per cui $y = \sin 2$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$. Osserviamo che, posto $g(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$, il cui grafico è riportato nell'esercizio 4 (1), si ha $f(x) = \sin g(x)$.
Inoltre, $f'(x) = g'(x) \cos g(x) = \frac{6x}{(x+1)^2)} \cos \frac{2x^2-1}{x^2+1}$, per cui bisogna studiare la disequazione $\cos \frac{2x^2-1}{x^2+1} \geq 0 \iff \frac{2x^2-1}{x^2+1} \leq \frac{\pi}{2} \iff |x| \leq \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ [vedi il grafico di g nell'esercizio 4 (1)]. Quindi $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}] \cup [0, \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}]$.

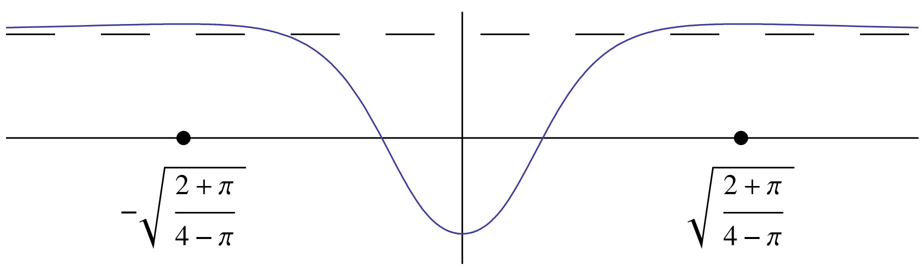

Figura 18: Grafico per l'esercizio 4 (19)

Allora, $x = 0$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = \pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ sono punti di massimo relativo. Si ha $f(0) = -\sin 1$, e $f(\pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}) = 1$.
Il grafico è riportato in figura 18.

(20) Sia $f(x) = \sqrt{\cos \frac{2x^2-1}{x^2+1}}$. Osserviamo che, posto $g(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$, il cui grafico è riportato nell'esercizio 4 (1), si ha $f(x) = \sqrt{\cos g(x)}$. Allora $\operatorname{dom} f = [-\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}, \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}]$, f è continua, e pari.

Inoltre, $f'(x) = \frac{-g'(x)\sin g(x)}{2\sqrt{\cos g(x)}} = -\frac{3x}{(x+1)^2)} \frac{\sin \frac{2x^2-1}{x^2+1}}{\sqrt{\cos \frac{2x^2-1}{x^2+1}}}$, per cui bisogna studiare la disequazione $\sin \frac{2x^2-1}{x^2+1} \geq 0 \iff 0 \leq \frac{2x^2-1}{x^2+1} \leq \frac{\pi}{2} \iff \frac{1}{\sqrt{2}} \leq |x| \leq \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ [vedi il grafico di g nell'esercizio 4 (1)]. Quindi $f'(x) \geq 0 \iff x \in [-\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Si ha poi $f'_-(\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}) = \lim_{x\to(\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}})^-} f'(x) = -\lim_{x\to(\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}})^-} \frac{3\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}}{(\frac{2+\pi}{4-\pi}+1)^2}(1+o(1)) \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+o(1))}{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}+o(1))}} = -\infty$.

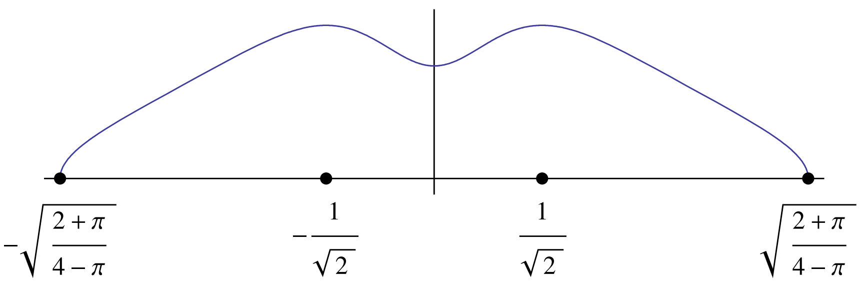

Figura 19: Grafico per l'esercizio 4 (20)

Allora, $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ sono punti di minimo relativo, e $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono punti di massimo relativo. Si ha $f(0) = \sqrt{\cos 1}$, $f(\pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}) = 0$, $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$.
Il grafico è riportato in figura 19.

□

Svolgimento esercizio 5

(1) Sia $f(x) = \frac{x^2+2|x|+1}{x+1}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Poiché

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0, \\ \frac{x^2-2x+1}{x+1} & x < 0, \end{cases}$$

basta studiare la funzione f per $x < 0$. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to(-1)^\pm} \frac{x^2-2x+1}{x+1} &= \pm\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+1}{x+1} &= \pm\infty \\ m_- := \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+1}{x(x+1)} &= 1 \\ q_- := \lim_{x\to-\infty} \Big(\frac{x^2-2x+1}{x+1} - x\Big) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+1-x^2-x}{x+1} = -3, \end{aligned}$$

per cui f ha asintoto verticale in $x = -1$ e asintoto obliquo $y = x - 3$, per $x \to -\infty$.

Inoltre, per $x < 0$, si ha

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+1) - (x^2 - 2x + 1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} \iff x \leq -3.$$

Quindi, f è crescente in $(-\infty, -3)$ e in $(0, +\infty)$, e decrescente in $(-3, -1)$, e in $(-1, 0)$, per cui, $x = -3$ è un punto di massimo relativo, con $f(-3) = -8$, e $x = 0$ e è un punto di minimo relativo, con $f(0) = 1$. Osserviamo che $f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -3$, mentre $f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1$, per cui $x = 0$ è un punto angoloso.

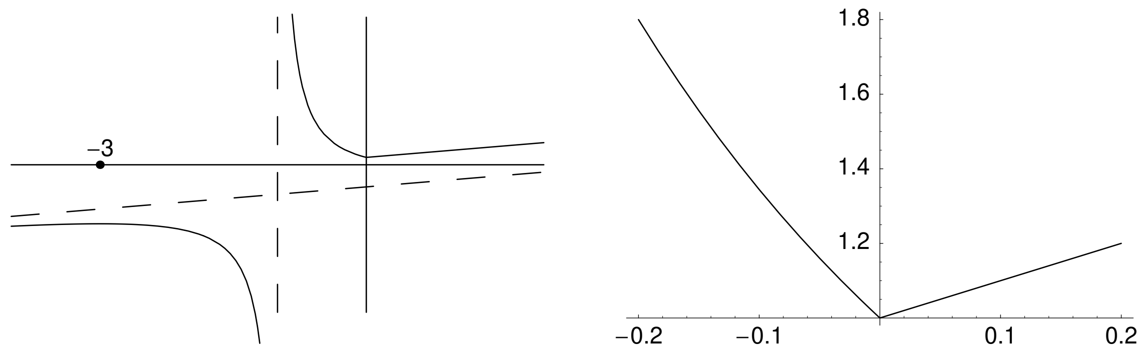

Figura 20: Grafico per l'esercizio 5 (1)

Ancora,

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2 + 2x - 3)}{(x+1)^4} = \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 - 2x^2 - 4x + 6}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{8}{(x+1)^3} > 0 \iff x > -1.$$

Quindi, f è convessa in $(-1, 0)$ e in $(0, +\infty)$, ed è concava in $(-\infty, -1)$, mentre non ci sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 20, dove è anche riportato il comportamento in un intorno di $x = 0$.

(2) Sia $f(x) = \frac{4|x^2+x|-1}{x^2}$. Allora dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4|x^2 + x| - 1}{x^2} = 4$$
$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{4|x^2 + x| - 1}{x^2} = -\infty,$$

per cui f ha asintoto verticale in $x = 0$ e asintoto orizzontale $y = 4$, per $x \to \pm\infty$.
Poiché

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2+4x-1}{x^2} & x \leq -1 \text{ o } x > 0, \\ -\frac{4x^2+4x+1}{x^2} & -1 < x < 0, \end{cases}$$

si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(8x+4)x^2-2x(4x^2+4x-1)}{x^4} = \frac{8x^3+4x^2-8x^3-8x^2+2x}{x^4} = \frac{-4x^2+2x}{x^4} = \frac{2(1-2x)}{x^3} & x < -1 \text{ o } x > 0, \\ -\frac{(8x+4)x^2-2x(4x^2+4x+1)}{x^4} = -\frac{8x^3+4x^2-8x^3-8x^2-2x}{x^4} = \frac{4x^2+2x}{x^4} = \frac{2(2x+1)}{x^3} & -1 < x < 0. \end{cases}$$

Poiché

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \iff & \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 0 \\ \frac{1-2x}{x^3} \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \frac{2x+1}{x^3} \geq 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \bigvee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x < -\frac{1}{2} \text{ o } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ne segue che $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-1, -\frac{1}{2}] \cup (0, \frac{1}{2}]$. Quindi, f è crescente in $(-1, -\frac{1}{2})$ e in $(0, \frac{1}{2})$, e decrescente in $(-\infty, -1)$, in $(-\frac{1}{2}, 0)$ e in $(\frac{1}{2}, +\infty)$, per cui, $x = -1$ è un punto di minimo relativo, con $f(-1) = -1$, e $x = \pm\frac{1}{2}$ sono punti di massimo relativo, con $f(-\frac{1}{2}) = 0$ e $f(\frac{1}{2}) = 8$. Osserviamo che $f'_-(-1) = \lim_{x \to (-1)^-} f'(x) = -6$, mentre $f'_-(-1) = \lim_{x \to (-1)^+} f'(x) = 2$, per cui $x = -1$ è un punto angoloso.

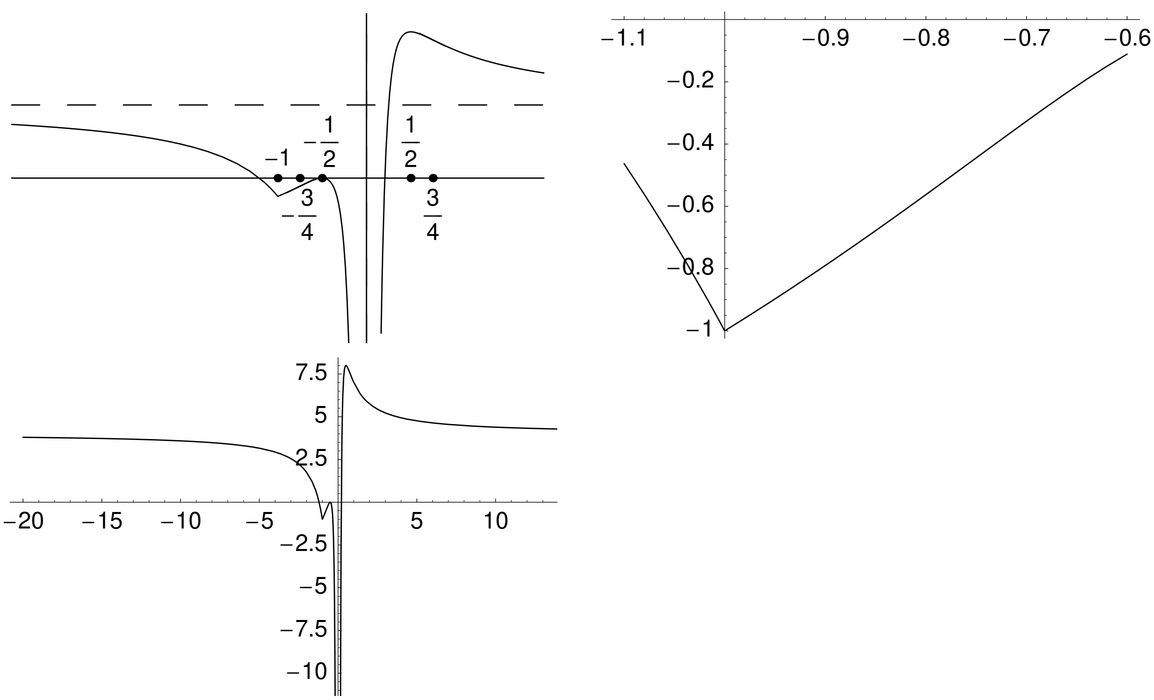

Figura 21: Grafico per l'esercizio 5 (2)

Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2\left(-2x^3-3x^2(1-2x)\right)}{x^6} = \frac{2(4x-3)}{x^4} & x < -1 \text{ o } x > 0, \\ \frac{2\left(2x^3-3x^2(2x+1)\right)}{x^6} = \frac{-2(4x+3)}{x^4} & -1 < x < 0, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in (-1, -\frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-1, -\frac{3}{4})$ e in $(\frac{3}{4}, +\infty)$, ed è concava in $(-\infty, -1)$, in $(-\frac{1}{2}, 1)$ e in $(1, +\infty)$, mentre $x = -\frac{3}{4}$ e $x = \frac{3}{4}$ sono punti di flesso per f.

Il grafico è riportato in figura 21, dove è anche riportato il comportamento in un intorno di $x=-1$, e il comportamento per x grandi.

(3) Sia $f(x)=\frac{|x^2-1|-1}{(x-1)^2}$. Allora $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x^2-1|-1}{(x-1)^2}=1$$
$$\lim_{x\to1^\pm}\frac{|x^2-1|-1}{(x-1)^2}=-\infty,$$

per cui f ha asintoto verticale in $x=1$ e asintoto orizzontale $y=1$, per $x\to\pm\infty$.
Poiché

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2}{(x-1)^2} & x\le-1 \text{ o } x>1,\\ -\frac{x^2}{(x-1)^2} & -1<x<1,\end{cases}$$

si ha

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{2x(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2)}{(x-1)^4}=\frac{2x^2-2x-2x^2+4}{(x-1)^3}=\frac{2(2-x)}{(x-1)^3} & x<-1 \text{ o } x>1,\\ -\frac{2x(x-1)^2-2(x-1)x^2}{(x-1)^4}=-\frac{2x^2-2x-2x^2}{(x-1)^3}=\frac{2x}{(x-1)^3} & -1<x<1.\end{cases}$$

Poiché

$$\begin{aligned}f'(x)\ge0 \iff &\begin{cases}x<-1 \text{ o } x>1\\ \frac{2-x}{(x-1)^3}\ge0\end{cases} \bigvee \begin{cases}-1<x<1\\ \frac{2x}{(x-1)^3}\ge0\end{cases}\\ \iff &\begin{cases}x<-1 \text{ o } x>1\\ 1\le x\le2\end{cases} \bigvee \begin{cases}-1<x<1\\ x\le0 \text{ o } x>1,\end{cases}\end{aligned}$$

ne segue che $f'(x)\ge0 \iff x\in(-1,0]\cup(1,2]$. Quindi, f è crescente in $(-1,0)$ e in $(1,2)$, e decrescente in $(-\infty,-1)$, in $(0,1)$ e in $(2,+\infty)$, per cui, $x=-1$ è un punto di minimo relativo, con $f(-1)=-\frac14$, e $x=0$ e $x=2$ sono punti di massimo relativo, con $f(0)=0$ e $f(2)=2$. Osserviamo che $f'_-(-1)=\lim_{x\to(-1)^-}f'(x)=-\frac34$, mentre $f'_-(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}f'(x)=\frac14$, per cui $x=-1$ è un punto angoloso.
Ancora,

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{2\left(-(x-1)^3-3(x-1)^2(2-x)\right)}{(x-1)^6}=\frac{2(2x-5)}{(x-1)^4} & x<-1 \text{ o } x>0,\\ \frac{2\left((x-1)^3-3(x-1)^2x\right)}{(x-1)^6}=\frac{-2(2x+1)}{(x-1)^4} & -1<x<0,\end{cases}$$

per cui $f''(x)\ge0 \iff x\in(-1,-\frac12]\cup[\frac52,+\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-1,-\frac12)$ e in $(\frac52,+\infty)$, ed è concava in $(-\infty,-1)$, in $(-\frac12,1)$ e in $(1,\frac52)$, mentre $x=-\frac12$ e $x=\frac52$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 22, dove è anche riportato il comportamento in un intorno di $x=-1$, in un intorno di $x=-\frac12$, e il comportamento per x grandi.

(4) Sia $f(x)=x-\log(x^2+x+1)$. Allora $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}$ [perché $x^2+x+1>0$, per ogni $x\in\mathbb{R}$], f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty}x-\log(x^2+x+1)=\pm\infty$$
$$m_\pm:=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-\log(x^2+x+1)}{x}=1$$
$$q_\pm:=\lim_{x\to\pm\infty}x-\log(x^2+x+1)-x=-\infty,$$

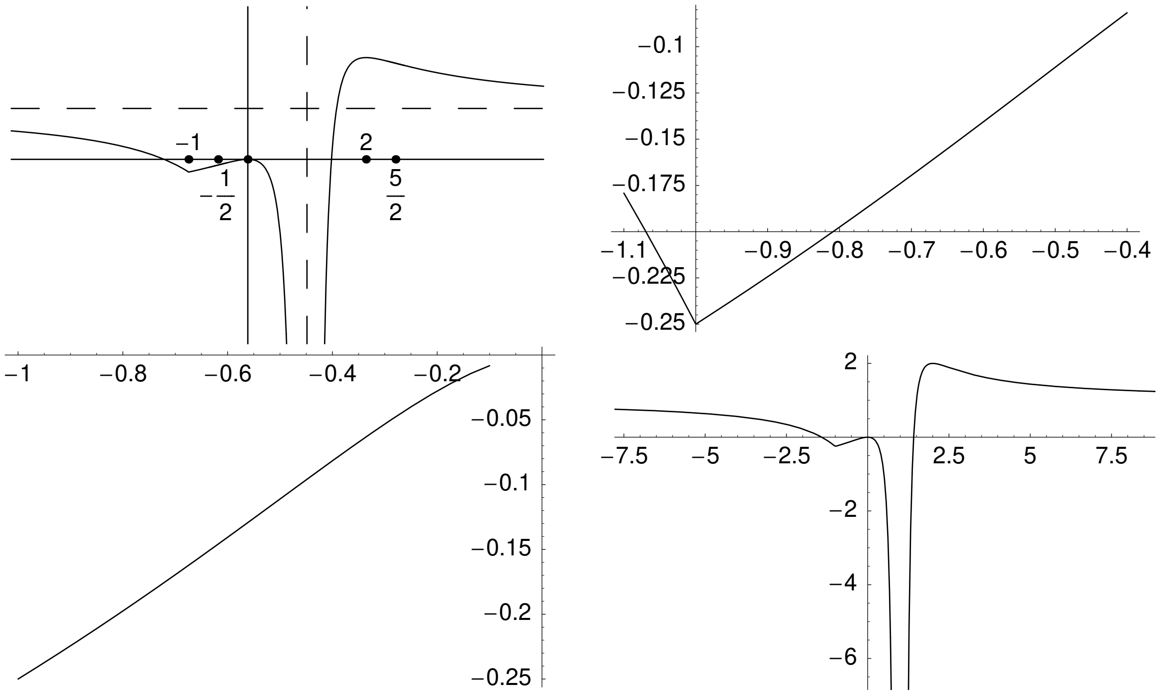

Figura 22: Grafico per l'esercizio 5 (3)

per cui f non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-2x-1}{x^2+x+1} = \frac{x^2-x}{x^2+x+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. Quindi, f è crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(1, +\infty)$, e decrescente in $(0, 1)$, per cui, $x = 0$ è un punto di massimo relativo, con $f(0) = 0$, e $x = 1$ è un punto di minimo relativo, con $f(1) = 1 - \log 3$.
Ancora,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{(2x^3 - x^2 + 2x^2 - x + 2x - 1) - (2x^3 + x^2 - 2x^2 - x)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x^2+x+1)^2} \end{aligned}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2})$ e in $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$, ed è concava in $(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$, mentre $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 23, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = 0$, e il comportamento per x grandi.

(5) Sia $f(x) = |x| - \log(x^2 + x + 1)$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ [perché $x^2 + x + 1 > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$], f è

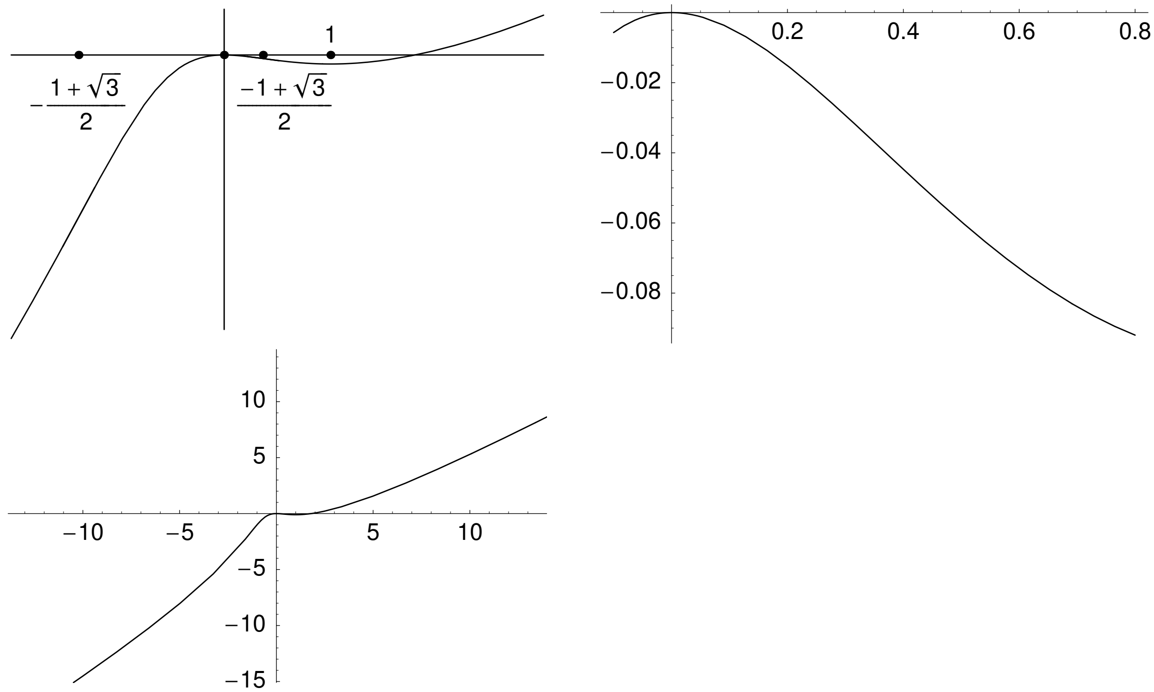

Figura 23: Grafico per l'esercizio 5 (4)

continua, né pari né dispari. Si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} |x| - \log(x^2+x+1) = +\infty\\
m_\pm &:= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x| - \log(x^2+x+1)}{x} = \pm 1\\
q_\pm &:= \lim_{x\to\pm\infty} |x| - \log(x^2+x+1) - (\pm x) = -\infty,
\end{aligned}$$

per cui f non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-2x-1}{x^2+x+1} = \frac{x^2-x}{x^2+x+1} & x > 0\\ -1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = -\frac{x^2+x+1+2x+1}{x^2+x+1} = -\frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1} & x < 0, \end{cases}$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in [-2,-1] \cup [1,+\infty)$. Quindi, f è crescente in $(-2,-1)$ e in $(1,+\infty)$, e decrescente in $(-\infty,-2)$ e in $(-1,1)$, per cui, $x=-2$ e $x=1$ sono punti di minimo relativo, con $f(-2) = 2 - \log 3$ e $f(1) = 1 - \log 3$, e $x=-1$ è un punto di massimo relativo, con $f(-1) = 1$.
Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2} & x > 0\\ -\frac{(2x+3)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2+3x+2)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2} & x < 0, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2})$ e in $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$, ed è concava in $(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$, mentre $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ sono punti di flesso per f.

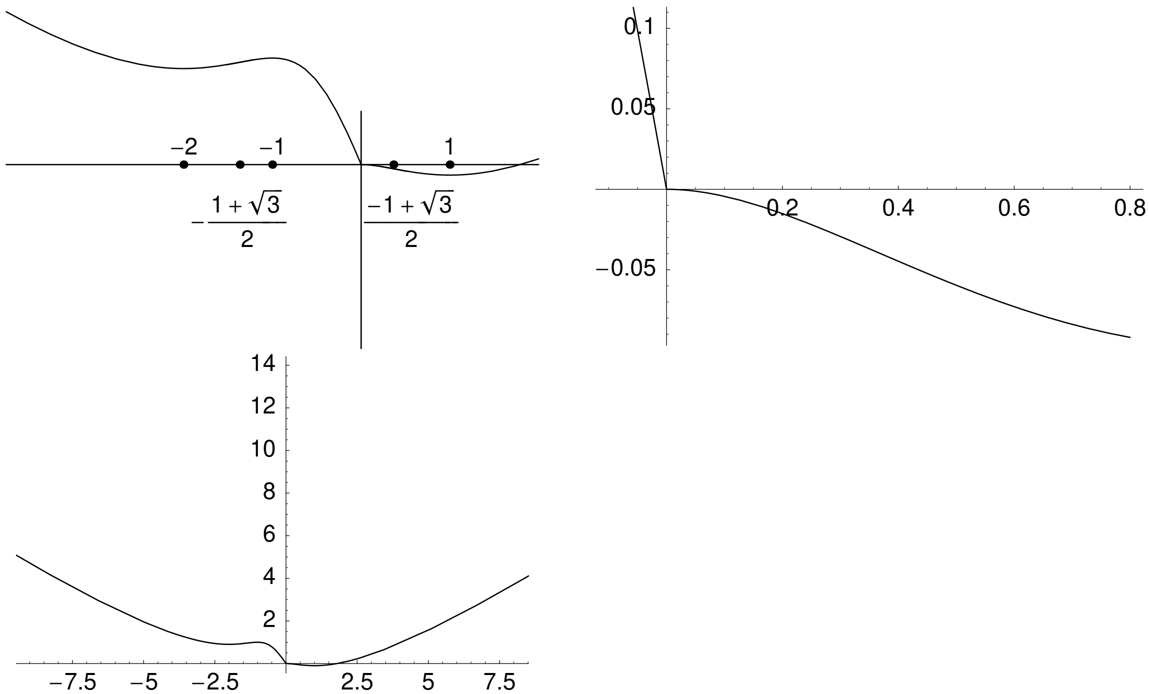

Figura 24: Grafico per l'esercizio 5 (5)

Il grafico è riportato in figura 24, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = 0$, e il comportamento per x grandi.

(6) Sia $f(x) = (x^2 + x)e^{x+1}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2 + x)e^{x+1} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty}(x^2 + x)e^{x+1} = +\infty$$
$$m_+ := \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2 + x)e^{x+1}}{x} = +\infty,$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = 0$, per $x \to -\infty$, mentre non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \to +\infty$.
Inoltre, $f'(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{x+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.
Allora, $x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo, con $f(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = (2 + \sqrt{5})e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, e $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo per f, con $f(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}) = (2 - \sqrt{5})e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.
Ancora, $f''(x) = (x^2 + 5x + 4)e^{x+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -4)$ e in $(-1, +\infty)$, ed è concava in $(-4, -1)$, mentre $x = -4$ e $x = -1$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 25.

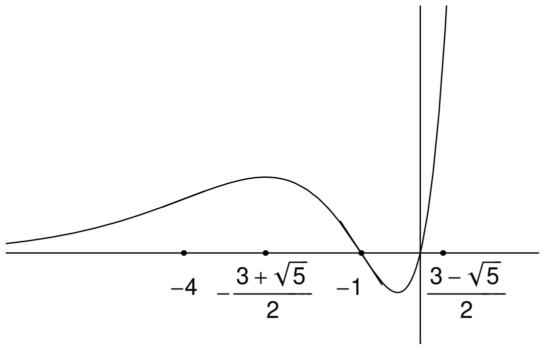

Figura 25: Grafico per l'esercizio 5 (6)

(7) Sia $f(x) = (x^2 + x)e^{-(x+1)}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 + x)e^{-(x+1)} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} (x^2 + x)e^{-(x+1)} = +\infty$$
$$m_- := \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2 + x)e^{-(x+1)}}{x} = +\infty,$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = 0$, per $x \to +\infty$, mentre non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \to -\infty$.
Inoltre, $f'(x) = -(x^2 - x - 1)e^{-(x+1)} \geq 0 \iff x \in [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.

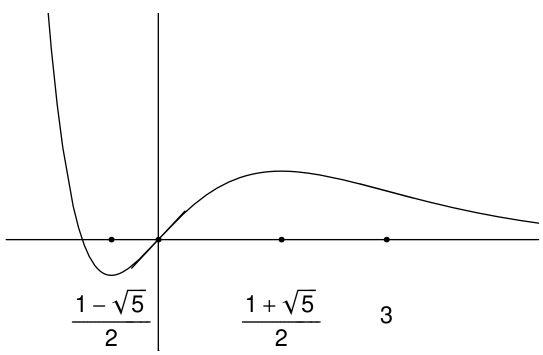

Figura 26: Grafico per l'esercizio 5 (7)

Allora, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo, con $f(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = (2 - \sqrt{5})e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$, e $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo per f, con $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = (2 + \sqrt{5})e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.
Ancora, $f''(x) = (x^2 - 3x)e^{-(x+1)} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, 0)$ e in $(3, +\infty)$, ed è concava in $(0, 3)$, mentre $x = 0$ e $x = 3$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 26.

(8) Sia $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e$$
$$\lim_{x\to(-1)^+} e^{\frac{x}{x+1}} = 0$$
$$\lim_{x\to(-1)^-} e^{\frac{x}{x+1}} = +\infty,$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = e$, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} > 0$, per ogni $x \in \operatorname{dom} f$. Quindi, f è crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, +\infty)$. Inoltre, $\lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = 0$.

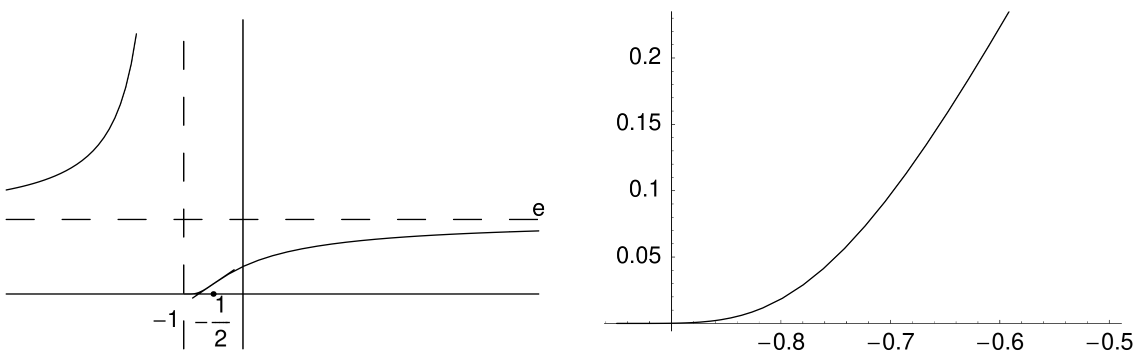

Figura 27: Grafico per l'esercizio 5 (8)

Ancora, $f''(x) = \left(-\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}\right) e^{\frac{x}{x+1}} = -\frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2})$.
Quindi, f è convessa in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, -\frac{1}{2})$, ed è concava in $(-\frac{1}{2}, +\infty)$, mentre $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 27, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = -1$.

(9) Sia $f(x) = e^{\frac{x}{|x+1|}}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{|x+1|}} = e$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{|x+1|}} = \frac{1}{e}$$
$$\lim_{x\to(-1)^+} e^{\frac{x}{|x+1|}} = 0$$
$$\lim_{x\to(-1)^-} e^{\frac{x}{|x+1|}} = 0,$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = e$, per $x \to +\infty$, e asintoto orizzontale $y = \frac{1}{e}$, per $x \to -\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{|x+1| - x \operatorname{sgn}(x+1)}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{|x+1|}} = \begin{cases} -\frac{1}{(x+1)^2} e^{-\frac{x}{x+1}} & x < -1 \\ \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} & x > -1, \end{cases}$
per cui $f'(x) > 0$, per ogni $x \in (-1, +\infty)$. Quindi, f è decrescente in $(-\infty, -1)$ e crescente in $(-1, +\infty)$ [per cui, $x = -1$ sarebbe un punto di minimo relativo, se $-1 \in \operatorname{dom} f$]. Inoltre, $\lim_{x\to(-1)^\pm} f'(x) = 0$.

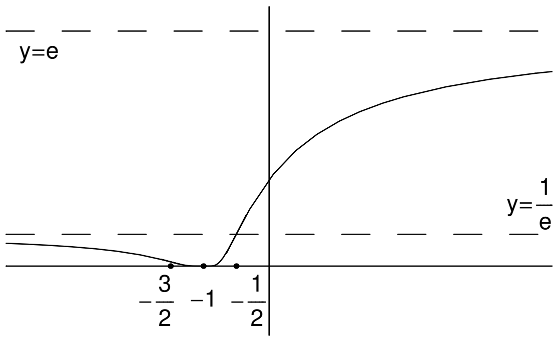

Figura 28: Grafico per l'esercizio 5 (9)

Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}\right)e^{-\frac{x}{x+1}} = \frac{2x+3}{(x+1)^4}e^{-\frac{x}{x+1}} & x < -1 \\ \left(-\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}\right)e^{-\frac{x}{x+1}} = -\frac{2x+1}{(x+1)^4}e^{-\frac{x}{x+1}} & x > -1, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in [-\frac{3}{2}, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2}]$. Quindi, f è convessa in $[-\frac{3}{2}, -1)$ e in $(-1, -\frac{1}{2})$, ed è concava in $(-\infty, -\frac{3}{2})$ e in $(-\frac{1}{2}, +\infty)$, mentre $x = -\frac{3}{2}$ e $x = -\frac{1}{2}$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 28.

(10) Sia $f(x) = \mathrm{arctg}(1 - x^2)$. Allora $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = -\frac{\pi}{2} + o(1)$, per cui f ha asintoto orizzontale $y = -\frac{\pi}{2}$, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre si ha $f'(x) = \frac{-2x}{1+(1-x^2)^2}$. Poiché $f'(x) > 0 \iff x < 0$, ne segue che f è crescente in $(-\infty, 0)$, e decrescente in $(0, +\infty)$, per cui $x = 0$ è un punto di massimo relativo, con $f(0) = \frac{\pi}{4}$.

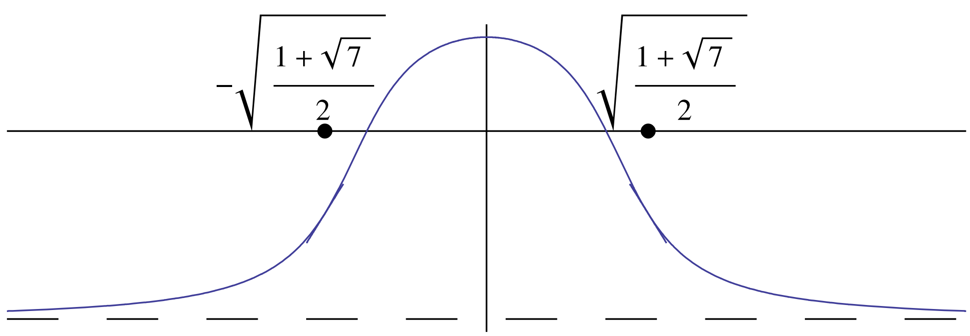

Figura 29: Grafico per l'esercizio 5 (10)

Ancora, $f''(x) = -2\frac{1+(x^2-1)^2 - x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{\left(1+(x^2-1)^2\right)^2} = -2\frac{1+x^4-2x^2+1-4x^4+4x^2}{\left(1+(x^2-1)^2\right)^2} = \frac{2(3x^4-2x^2-2)}{\left(1+(x^2-1)^2\right)^2}$ ed essendo $3x^4 - 2x^2 - 2 \geq 0 \iff x^2 \geq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$, si ha $f''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}})$ e in $(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, +\infty)$, ed è concava in $(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}})$, mentre $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 29.

(11) Sia $f(x) = \operatorname{arctg}(1-x^2) + \operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{|1-x^2|}\Big)$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$, f è continua, e pari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg}(1-x^2) + \operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{|1-x^2|}\Big) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to 1^\pm} \operatorname{arctg}(1-x^2) + \operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{|1-x^2|}\Big) = \frac{\pi}{2},$$

per cui f può essere prolungata per continuità anche in $x=\pm1$, e ha asintoto orizzontale $y = -\frac{\pi}{2}$, per $x \to \pm\infty$.
Poiché

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1-x^2) + \operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{1-x^2}\Big) = \frac{\pi}{2} & -1 < x < 1, \\ \operatorname{arctg}(1-x^2) + \operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{x^2-1}\Big) & x < -1 \text{ o } x > 1, \end{cases}$$

si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1, \\ \frac{-2x}{1+(1-x^2)^2} + \frac{-\frac{2x}{(x^2-1)^2}}{1+\frac{1}{(x^2-1)^2}} = \frac{-4x}{1+(1-x^2)^2} & x < -1 \text{ o } x > 1. \end{cases}$$

Poiché $f'(x) > 0 \iff x < -1$, ne segue che f è crescente in $(-\infty,-1)$, è costante in $(-1,1)$, e decrescente in $(1,+\infty)$, per cui ogni $x \in [-1,1]$ è un punto di massimo relativo, con $f(x) = \frac{\pi}{2}$. Osserviamo che $f'_-(1) = \lim_{x\to1^-} f'(x) = 0$, mentre $f'_+(1) = \lim_{x\to1^+} f'(x) = -4$, per cui $x=\pm1$ sono punti angolosi.

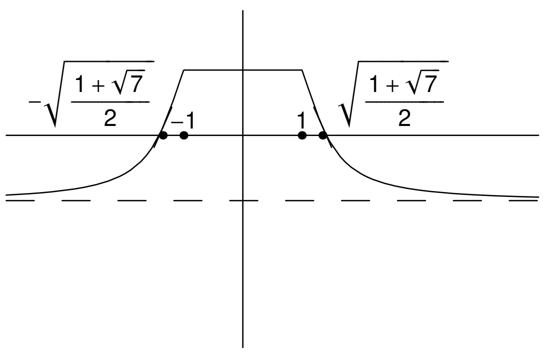

Figura 30: Grafico per l'esercizio 5 (11)

Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} -4\frac{1+(x^2-1)^2 - x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{\big(1+(x^2-1)^2\big)^2} = -4\frac{1+x^4-2x^2+1-4x^4+4x^2}{\big(1+(x^2-1)^2\big)^2} = \frac{4(3x^4-2x^2-2)}{\big(1+(x^2-1)^2\big)^2} & x < -1 \text{ o } x > 1, \\ 0 & -1 < x < 1, \end{cases}$$

ed essendo $3x^4 - 2x^2 - 2 \geq 0 \iff x^2 \geq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$, si ha $f''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}})$ e in $(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, +\infty)$, ed è concava in $(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, -1)$ e in $(1, \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}})$, mentre $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 30.

□

Svolgimento esercizio 6

(1) Poiché $f'(x) = 3x^2e^{x^3} + e^{\operatorname{arctg}(3x)} \frac{6}{1+9x^2} > 0$, $x \in \mathbb{R}$, ne segue che f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, e quindi ivi iniettiva. Allora $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{6}$.

(2) Poiché $f'(x) = \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+e} > 0$, $x > 0$, ne segue che f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$, e quindi ivi iniettiva. Allora $(f^{-1})'(\log(2+e)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2+e}{5}$.

(3) Si ha $f'(x) = \frac{-1+\sin x}{5\sqrt[5]{(1-x-\cos x)^4}}$, definita per $x \neq 0$, in quanto, posto $g(x) = 1 - x - \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, si ha $g'(x) = -1 + \sin x < 0$, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, per cui g è strettamente decrescente e quindi iniettiva in $\mathbb{R}$, e quindi si annulla solo per $x = 0$. Inoltre, $f'(x) < 0$, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus (\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\})$, per cui f è strettamente decrescente e quindi iniettiva in $\mathbb{R}$. Allora $(f^{-1})'(0) = \lim_{y\to 0}(f^{-1})'(y) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{f'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5|o(1)|}{-1+o(1)} = 0$.

(4) Si ha $f'(x) = 2e^{2x} - 4x$, $x \in \mathbb{R}$, e $f''(x) = 4e^{2x} - 4 \geq 0 \iff x \geq 0$, per cui f' è decrescente in $(-\infty, 0)$ e crescente in $(0, +\infty)$, e ha un minimo assoluto in $x = 0$, che vale $f'(0) = 2$, per cui $f'(x) \geq 2 > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, e quindi ivi iniettiva. Allora $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$.

(5) Si ha $f'(x) = x - e^x$, $x \in \mathbb{R}$, e $f''(x) = 1 - e^x \geq 0 \iff x \leq 0$, per cui f' è crescente in $(-\infty, 0)$ e decrescente in $(0, +\infty)$, e ha un massimo assoluto in $x = 0$, che vale $f'(0) = -1$, per cui $f'(x) \leq -1 < 0$, $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che f è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, e quindi ivi iniettiva. Allora $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = -1$.

$\square$

Svolgimento esercizio 7

(1) Si ha $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4 - \dfrac{1}{720}x^6 + o(x^6)\right) - \left(1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{1}{48}x^6 + o(x^6)\right) = -\dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{7}{360}x^6 + o(x^6)$.

(2) Posto $y = x - 1$, si ha $f(x) = f(1+y) = \log\left(1 + \dfrac{2y}{3}\right) - \log\left(1 + \dfrac{y}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}y - \dfrac{2}{9}y^2 + \dfrac{8}{81}y^3 - \dfrac{4}{81}y^4 + o(y^4)\right) - \left(\dfrac{1}{3}y - \dfrac{1}{18}y^2 + \dfrac{1}{81}y^3 - \dfrac{1}{324}y^4 + o(y^4)\right) = \dfrac{1}{3}y - \dfrac{1}{6}y^2 + \dfrac{7}{81}y^3 - \dfrac{5}{108}y^4 + o(y^4) = \dfrac{1}{3}(x-1) - \dfrac{1}{6}(x-1)^2 + \dfrac{7}{81}(x-1)^3 - \dfrac{5}{108}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$.

(3) Si ha $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \dfrac{1}{6!}x^6 + o(x^7)\right)\left(x^2 - \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{3}x^6 + o(x^6)\right) = x^2 - \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{3}x^6 - \dfrac{1}{2}x^2\left(x^2 - \dfrac{1}{2}x^4\right) + \dfrac{1}{4!}x^4 \cdot x^2 + o(x^6) = x^2 - x^4 + \dfrac{5}{8}x^6 + o(x^6)$.

(4) Si ha $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + o(x^4)\right)\left(x - \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right) - x\left(x - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) = x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{12}x^5 + o(x^5) - x^2 + \dfrac{1}{6}x^4 + o(x^5) = -\dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{6}x^4 - \dfrac{1}{12}x^5 + o(x^5)$.

(5) Si ha $f(x) = \left(1 - x^2 + \dfrac{1}{2}x^4 + o(x^5) - 1 + x^2 - \dfrac{1}{6}x^4 + o(x^5)\right)^2 = \dfrac{1}{9}x^8 + o(x^9)$.

(6) Si ha $f(x) = x^2\left(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + o(x^4)\right)^2 - \left(1 - 2x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 - \dfrac{4}{45}x^6 + o(x^7)\right) = x^2\left(x^2 - x^3 + \dfrac{11}{12}x^4 + o(x^4)\right)^2 - \left(1 - 2x^2 + \dfrac{2}{3}x^4 - \dfrac{4}{45}x^6 + o(x^7)\right) = -1 + 2x^2 + \dfrac{1}{3}x^4 - x^5 + \dfrac{181}{180}x^6 + o(x^6)$.

(7) Si ha $f(x)=(x^2+x^3)-\frac{1}{6}(x^2+x^3)^3+o(x^8)=x^2+x^3-\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{2}x^7-\frac{1}{2}x^8+o(x^8)$.

(8) Si ha $f(x)=2\log\Big(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\Big)+\Big(x^2-\frac{1}{6}x^6+o(x^9)\Big)=2\Big(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\Big)-\Big(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\Big)^2+o(x^4)+x^2+o(x^5)=-\frac{1}{6}x^4+o(x^4)$.

(9) Si ha $f(x)=\Big(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\Big)^2+2\log\Big(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\Big)=x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^4)+2\Big(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\Big)-\Big(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\Big)^2+o(x^4)=x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^4)-x^2+\frac{1}{12}x^4+o(x^4)-\frac{1}{4}x^4+o(x^4)=\frac{1}{6}x^4(1+o(1))$.

(10) Posto $y=x-1$, si ha $f(x)=f(y+1)=\sin\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}y\Big)-\log\sin\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}y\Big)=\cos\Big(\frac{\pi}{2}y\Big)-\log\cos\Big(\frac{\pi}{2}y\Big)=1-\frac{\pi^2}{8}y^2+\frac{\pi^4}{384}y^4+o(y^4)-\log\Big(1-\frac{\pi^2}{8}y^2+\frac{\pi^4}{384}y^4+o(y^4)\Big)=1-\frac{\pi^2}{8}y^2+\frac{\pi^4}{384}y^4+o(y^4)-\Big(-\frac{\pi^2}{8}y^2+\frac{\pi^4}{384}y^4+o(y^4)\Big)+\frac{1}{2}\Big(-\frac{\pi^2}{8}y^2+\frac{\pi^4}{384}y^4+o(y^4)\Big)^2=1+\frac{\pi^4}{128}y^4+o(y^4)=1+\frac{\pi^4}{128}(x-1)^4+o((x-1)^4)$

(11) Si ha $f(x)=\Big(1-x^2+\frac{1}{6}x^6+o(x^6)\Big)^{1/4}-\Big(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4-\frac{4}{45}x^6+o(x^6)\Big)=1-\frac{1}{4}\Big(-x^2+\frac{1}{6}x^6+o(x^6)\Big)-\frac{3}{32}\Big(-x^2+\frac{1}{6}x^6+o(x^6)\Big)^2-\frac{7}{128}\Big(-x^2+\frac{1}{6}x^6+o(x^6)\Big)^3+o(x^6)-1+2x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^6+o(x^6)=1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{24}x^6-\frac{3}{32}x^4-\frac{7}{128}x^6-1+2x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{4}{45}x^6+o(x^6)=\frac{7}{4}x^2-\frac{73}{96}x^4+\frac{437}{5760}x^6+o(x^6)$.

(12) Posto $y=x-1$, si ha $f(x)=f(y+1)=\exp\big(y\log(y+1)\big)=\exp\Big(y\Big(y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+o(y^3)\Big)\Big)=\exp\Big(y^2-\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{3}y^4+o(y^4)\Big)=1+\Big(y^2-\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{3}y^4+o(y^4)\Big)+\frac{1}{2}\Big(y^2-\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{3}y^4+o(y^4)\Big)^2+o(y^4)=1+y^2-\frac{1}{2}y^3+\frac{5}{6}y^4+o(y^4)=1+(x-1)^2-\frac{1}{2}(x-1)^3+\frac{5}{6}(x-1)^4+o((x-1)^4)$.

(13) Si ha $g(x):=\sin(2x)-2\log(1+x)=\Big(2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5+o(x^7)\Big)-2\Big(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6+o(x^6)\Big)=x^2-2x^3+\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{15}x^5+\frac{1}{3}x^6+o(x^6)$, per cui $f(x)=3\cos\big(g(x)\big)=3\cos\Big(x^2-2x^3+\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{15}x^5+\frac{1}{3}x^6+o(x^6)\Big)=3-\frac{3}{2}\Big(x^2-2x^3+\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{15}x^5+\frac{1}{3}x^6+o(x^6)\Big)^2+o(x^7)=3-\frac{3}{2}x^4+6x^5-\frac{15}{2}x^6+o(x^6)$.

(14) Si ha $g(x):=x^2\log(1+x+x^2)=x^2\Big(x+x^2-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+\frac{1}{3}(x+x^2)^3+o(x^3)\Big)=x^3+\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^5+o(x^5)$, per cui $f(x)=\exp\big(g(x)\big)-x\sin x=\exp\Big(x^3+\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^5+o(x^5)\Big)-x\Big(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\Big)=1+\Big(x^3+\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^5+o(x^5)\Big)+o(x^5)-x^2+\frac{1}{6}x^4+o(x^5)=1-x^2+x^3+\frac{2}{3}x^4-\frac{2}{3}x^5+o(x^5)$.

(15) Si ha $g(x):=x\sin x=x\Big(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)\Big)=x^2-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^6+o(x^6)$, per cui $f(x)=\frac{1}{1+g(x)}=1-g(x)+g(x)^2-g(x)^3+o(x^6)=1-\Big(x^2-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^6+o(x^6)\Big)+\Big(x^2-\frac{1}{6}x^4+o(x^4)\Big)^2-$

$\Big(x^2+o(x^2)\Big)^3+o(x^6) = 1-x^2+\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{120}x^6+x^4-\frac{1}{3}x^6-x^6+o(x^6) = 1-x^2+\frac{7}{6}x^4-\frac{161}{120}x^6+o(x^6)$.

(16) Si ha $g(x) := \cosh x-1 = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+o(x^6)$, per cui $f(x) = \frac{1}{1+g(x)} = 1-g(x)+g(x)^2-g(x)^3+o(x^6) = 1-\Big(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+o(x^6)\Big)+\Big(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\Big)^2-\Big(\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\Big)^3+o(x^6) = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{24}x^6-\frac{1}{8}x^6+o(x^6) = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4-\frac{61}{720}x^6+o(x^6)$.

(17) Si ha $f(x) = \Big(1+\frac{1}{2}(x-x^2)^2+\frac{1}{6}(x-x^2)^4+o(x^5)\Big)-\Big(-x^2-\frac{1}{2}x^4+o(x^5)\Big) = 1+\frac{1}{2}x^2-x^3+\frac{13}{24}x^4-\frac{1}{6}x^5+o(x^5)+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^5) = 1+\frac{3}{2}x^2-x^3+\frac{25}{24}x^4-\frac{1}{6}x^5+o(x^5)$.

(18) Posto $g(x) := x\sinh x = x\Big(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\Big) = x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^6+o(x^6)$, si ha $f(x) = \log(1+g(x)) = \log\Big(1+x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^6+o(x^6)\Big) = x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^6+o(x^6)-\frac{1}{2}\Big(x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^6+o(x^6)\Big)^2+\frac{1}{3}\Big(x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^6+o(x^6)\Big)^3+o(x^6) = x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^6-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{3}x^6+o(x^6) = x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{7}{40}x^6+o(x^6)$.

□

Svolgimento esercizio 8

(1) Si ha $f(x) = \dfrac{1-x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)-\big(1-\frac{1}{2}\cdot 2x^2+\frac{1}{4!}\cdot 4x^4+o(x^4)\big)}{x^4(1+o(1))} = \dfrac{\frac{1}{3}x^4(1+o(1))}{x^4(1+o(1))} \to \dfrac{1}{3}$.

(2) Si ha $f(x) = \dfrac{1-\frac{1}{2}\cdot 2x^4+\frac{1}{4!}\cdot 4x^8+o(x^8)-\big(1-x^4+\frac{1}{2}x^8+o(x^8)\big)}{x^8(1+o(1))} = \dfrac{-\frac{1}{3}x^8(1+o(1))}{x^8(1+o(1))} \to -\dfrac{1}{3}$.

(3) Si ha $f(x) = \dfrac{x^2-\big(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\big)^2}{x^3\big(1+x+o(x)-1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\big)} = \dfrac{\frac{1}{3}x^4(1+o(1))}{x^4(1+o(1))} \to \dfrac{1}{3}$.

(4) Si ha $f(x) = \dfrac{x^2\big(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-x\big)}{\big(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\big)^3-x^3} = \dfrac{\frac{1}{6}x^5(1+o(1))}{-\frac{1}{2}x^5(1+o(1))} \to -\dfrac{1}{3}$.

(5) Si ha $f(x) = \dfrac{\big(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\big)^2-\big(x^2-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\big)}{x^2-x\big(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\big)} = \dfrac{x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)-x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{6}x^4(1+o(1))} = \dfrac{\frac{1}{6}x^4(1+o(1))}{-\frac{1}{6}x^4(1+o(1))} \to -1$.

(6) Si ha $f(x) = \dfrac{x^3-\frac{1}{2}x^6+o(x^6)-\big(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\big)^3}{x^5(1+o(1))} = \dfrac{x^3+o(x^5)-x^3+\frac{1}{2}x^5+o(x^5)}{x^5(1+o(1))} \to \dfrac{1}{2}$.

(7) Si ha $f(x) = \dfrac{1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)-1-x\big(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\big)}{x^2(1+o(1))\cdot x(1+o(1))} = \dfrac{\frac{1}{2}x^3(1+o(1))}{x^3(1+o(1))} \to \dfrac{1}{2}$.

(8) Si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6) - \left(x - \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{1+x^2}-\cosh(x)}{(e^{x^2}-\cos x)^2}^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2 - x^3}{x^4(1+o(1))} \\
&= \frac{x^2 - x^3 + o(x^5) - x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4(1+o(1))} = \frac{-\frac{11}{12}x^4(1+o(1))}{x^4(1+o(1))} \to -\frac{11}{12}.
\end{aligned}
$$

(9) Si ha $f(x) = \dfrac{6x - \frac{1}{6}\cdot(6x)^3 + \frac{1}{5!}\cdot(6x)^5 + o(x^5) - 6x\left(1 - 6x^2 + \frac{1}{2}\cdot 36x^4 + o(x^4)\right)}{x^5(1+o(1))} = \dfrac{-\frac{216}{5}x^5(1+o(1))}{x^5(1+o(1))} \to -\dfrac{216}{5}$.

(10) Si ha $f(x) = \dfrac{x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} - 1} = \dfrac{-\frac{1}{2}x^2(1+o(1))}{1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) - 1} \to 2$.

(11) Si ha $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}\left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right) - x^2}{x^4} = \dfrac{x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\right)^3 - x^2}{x^4} = \dfrac{-\frac{1}{2}x^4(1+o(1))}{x^4} \to -\dfrac{1}{2}$.

(12) Si ha $f(x) = \dfrac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x - \log\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)}{x^2(1+o(1))} = \dfrac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2(1+o(1))} = \dfrac{\frac{1}{2}x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} \to \dfrac{1}{2}$.

(13) Si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\left\{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 - \log\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\right\}\log\left(x + o(x)\right)}{x^2(1+o(1))\cdot 2x(1+o(1))} \\
&= \frac{\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\cdot x(1+o(1))}{2x^3(1+o(1))} = \frac{\frac{3}{2}x^2(1+o(1))}{2x^2(1+o(1))} \to \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

(14) Si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - e^{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}}{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x} \\
&= \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 - \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3(1+o(1))} \\
&= \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3(1+o(1))} = \frac{\frac{1}{6}x^3(1+o(1))}{\frac{1}{3}x^3(1+o(1))} \to \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

(15) Si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 2x + (x^2 + x)\log\left(1 - \frac{1}{x}\right) \\
&= 3x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right) - 2x + (x^2 + x)\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right) \\
&= 3x - \frac{3}{2} + o(1) - 2x - x - 1 - \frac{1}{2} + o(1) \to -3.
\end{aligned}
$$

(16) Si ha

$$f(x) = x^4\left(1 - \cos\frac{2}{x} - x\log\left(1 + \frac{2}{x^3}\right) + \frac{3}{x^5}\right)$$
$$= x^4\left(1 - \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{3x^4} + o(\frac{1}{x^4})\right) - x\left(\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^6} + o(\frac{1}{x^6})\right) + \frac{3}{x^5}\right)$$
$$= x^4\left(- \frac{2}{3x^4} + o(\frac{1}{x^4}) + \frac{2}{x^5} + o(\frac{1}{x^5}) + \frac{3}{x^5}\right) = -\frac{2}{3} + o(1) \to -\frac{2}{3}.$$

(17) Posto $y = x - 1$, si ha

$$f(1+y) = \frac{e^{1+y} - 4e^{\sqrt{1+y}} + 3e^{\sqrt[3]{1+y}}}{\log(1+y) - y}$$
$$= \frac{e(1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)) - 4e^{1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+o(y^2)} + 3e^{1+\frac{1}{3}y-\frac{1}{9}y^2+o(y^2)}}{y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) - y}$$
$$= \frac{e(1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)) - 4e(1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)) + 3e(1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + \frac{1}{18}y^2 + o(y^2))}{-\frac{y^2}{2}(1 + o(1))}$$
$$= \frac{\frac{e}{3}y^2(1 + o(1))}{-\frac{y^2}{2}(1 + o(1))} \to -\frac{2}{3}e.$$

(18) Posto $y = x - \pi$, si ha

$$f(\pi + y) = \frac{y^2 - 8 + 8\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2})}{4\cos^2(\frac{\pi}{2} + \frac{y}{2}) - y^2} = \frac{y^2 - 8 + 8\cos(\frac{y}{2})}{4\sin^2(\frac{y}{2}) - y^2}$$
$$= \frac{y^2 - 8 + 8(1 - \frac{y^2}{8} + \frac{y^4}{16\cdot 24} + o(y^4))}{4(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{48} + o(y^3))^2 - y^2} = \frac{\frac{y^4}{48}(1 + o(1))}{-\frac{y^4}{12}(1 + o(1))} \to -\frac{1}{4}.$$

(19) Si ha

$$f(x) = \frac{\log(1 + x^2) - \sinh(x^2)}{x^2(\operatorname{arctg} x)^2} = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right) - \left(x^2 - o(x^5)\right)}{x^4(1 + o(1))} \to -\frac{1}{2}.$$

(20) Si ha

$$f(x) = \frac{\log(1 + x^2) - x\sinh(x) + \frac{2}{3}x^4}{(\operatorname{arctg} x - x)^2} = \frac{\left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^7)\right) - x\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)\right) + \frac{2}{3}x^4}{\left(- \frac{1}{3}x^3(1 + o(1))\right)^2}$$
$$= \frac{\frac{13}{40}x^6(1 + o(1))}{\frac{1}{9}x^6(1 + o(1))} \to \frac{117}{40}.$$

(21) Si ha

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2} - \cosh(x)}{(e^{x^2} - \cos x)^2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^5)\right) - \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)}{\left(1 + x^2 + o(x^3) - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^2}$$
$$= \frac{-\frac{1}{6}x^4(1 + o(1))}{\frac{9}{4}x^4(1 + o(1))} \to -\frac{2}{27}.$$

$\square$

Svolgimento esercizio 9

(1) Si ha

$$\begin{aligned}
a_n &= \big(\sqrt{n^2+n}-n\big)\Big(3n^2\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)-2n+(n^2+n)\log\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big)\\
&= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\Big(3n^2\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)-2n+(n^2+n)\Big(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{2}(1+o(1))\Big(3n-\frac{3}{2}+o(1)-2n-n-1-\frac{1}{2}+o(1)\Big)=\frac{1}{2}(-3+o(1))\to-\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

(2) Si ha

$$\begin{aligned}
a_n &= n^4\Big(1-\cos\frac{2}{n}-n\log\Big(1+\frac{2}{n^3}\Big)+\frac{3}{n^5}\Big)\\
&= n^4\Big(1-1+\frac{4}{2n^2}-\frac{16}{24n^4}+o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)-n\Big(\frac{2}{n^3}-\frac{4}{2n^6}+o\Big(\frac{1}{n^6}\Big)\Big)+\frac{3}{n^5}\Big)\\
&= n^4\Big(-\frac{2}{3n^4}(1+o(1))\Big)\to-\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(3) Si ha

$$\begin{aligned}
a_n &= n^3\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}-n^3-n=n^3\exp\Big(\frac{1}{n}\log\frac{n+1}{n}\Big)-n^3-n=n^3\exp\Big[\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big]-n^3-n\\
&= n^3\Big[1+\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^2+o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big]-n^3-n\\
&= n^3\Big[1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big]-n^3-n=n^3+n-\frac{1}{2}+o(1)-n^3-n\to-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(4) Si ha

$$\begin{aligned}
a_n &= n^3\sqrt{\frac{n+1}{n}}-n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{8}n=n^3\exp\Big(\frac{1}{2}\log\frac{n+1}{n}\Big)-n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{8}n\\
&= n^3\exp\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)\Big]-n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{8}n\\
&= n^3\Big[1+\Big(\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^2\\
&\qquad+\frac{1}{6}\Big(\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^3+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big]-n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{8}n\\
&= n^3\Big[1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{8n^2}-\frac{1}{8n^3}+\frac{1}{48n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big]-n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{8}n\\
&= n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{8}n+\frac{1}{16}+o(1)-n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{8}n\to\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

(5) Si ha

$$a_n=\frac{(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\frac{1}{n})(\sin\frac{1}{n}+e^{-n})}{e^{-\frac{1}{2n^2}}-\cos\frac{1}{n}}\overset{(a)}{=}\frac{-\frac{1}{3n^3}(1+o(1))\frac{1}{n}(1+o(1))}{\frac{1}{12n^4}(1+o(1))}\to-4,$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3})-\frac{1}{n}=-\frac{1}{3n^3}(1+o(1))$;
(ii) $\sin\frac{1}{n}+e^{-n}=\frac{1}{n}(1+o(1))$;
(iii) $e^{-\frac{1}{2n^2}}-\cos\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{8n^4}+o(\frac{1}{n^4})-1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{24n^4}+o(\frac{1}{n^4})=\frac{1}{12n^4}(1+o(1))$.

(6) Si ha

$$a_n = \frac{e^{n^2 \log(1+\frac{2}{n})} + e^{\sqrt{n}\log n}}{e^{2n} - e^{n(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n})\log 3}} = \frac{e^{n^2(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} + e^{\sqrt{n}\log n}}{e^{2n} - e^{n(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))\log 3}} = \frac{e^{2n-2+o(1)}(1+o(1))}{e^{2n}(1+o(1))} \to e^{-2}.$$

(7) Si ha

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+\sqrt{n})^n + (n+2)^n + 3n!}{(n+4)^n(e^{\sqrt{n+1}} + 2^{\sqrt{n}})} \overset{(a)}{=} \frac{n^n e^{\sqrt{n}} e^{-1/2}(1+o(1)) + n^n e^2(1+o(1)) + 3n!}{n^n e^4(1+o(1)) e^{\sqrt{n}}(1+o(1))} \\ &= \frac{n^n e^{\sqrt{n}} e^{-1/2}(1+o(1))}{n^n e^4(1+o(1)) e^{\sqrt{n}}(1+o(1))} \to e^{-9/2}, \end{aligned}$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $(n+\sqrt{n})^n = n^n\Big(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)^n = n^n \exp\Big\{n\log\Big(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big\} = n^n \exp\Big\{n\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)\Big\} = n^n e^{\sqrt{n}} e^{-1/2}(1+o(1))$;
(ii) $(n+b)^n = n^n\Big(1+\dfrac{b}{n}\Big)^n = n^n e^b(1+o(1))$;
(iii) $e^{\sqrt{n+1}} + 2^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}}\Big(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} + \Big(\dfrac{2}{e}\Big)^{\sqrt{n}}\Big) = e^{\sqrt{n}}\Big\{\exp\Big(\dfrac{1}{2\sqrt{n}}(1+o(1))\Big) + o(1)\Big\} = e^{\sqrt{n}}(1+o(1))$.

(8) Si ha

$$a_n = \frac{n^{n+1}(n^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1)(\sqrt{n+1}+1)}{(n+\log n)^n(1+\log n)} \overset{(a)}{=} \frac{n^{n+1}\frac{\log n}{2\sqrt{n}}(1+o(1))\sqrt{n}(1+o(1))}{n^{n+1}(1+o(1))\log n(1+o(1))} \to \frac{1}{2},$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $n^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1 = \exp\Big(\dfrac{\log n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\Big) - 1 = \dfrac{\log n}{2\sqrt{n}}(1+o(1))$;
(ii) $(n+\log n)^n = n^n \exp\Big(n\log\Big(1+\dfrac{\log n}{n}\Big)\Big) = n^n \exp\Big\{n\Big(\dfrac{\log n}{n} - \dfrac{\log^2 n}{2n^2} + o\Big(\dfrac{\log^2 n}{n^2}\Big)\Big)\Big\} = n^n \exp\big(\log n + o(1)\big) = n^{n+1}(1+o(1))$.

(9) Si ha

$$a_n = \frac{3n! + (en)^n + (5\sqrt[3]{n+2})^n}{\big((n+1)(1+\frac{1}{n})^n + 1\big)^n} \overset{(a)}{=} \frac{e^n n^n(1+o(1))}{n^n e^n e^{\frac{1}{e}+\frac{1}{2}}(1+o(1))} \to e^{-\frac{1}{e}-\frac{1}{2}},$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n + \dfrac{1}{n+1} = \exp\Big(n\log\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)\Big) + \dfrac{1}{n+1} = \exp\Big\{n\Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big\} = \exp\Big(1 - \dfrac{1}{2n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big) + \dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = e\Big(1 - \dfrac{1}{2n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big) + \dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = e + \Big(1 - \dfrac{e}{2}\Big)\dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$;
(ii) $\Big((n+1)(1+\dfrac{1}{n})^n + 1\Big)^n = (n+1)^n\Big(\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n + \dfrac{1}{n+1}\Big)^n = n^n\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n \exp\{n\log\Big(e + \Big(1 - \dfrac{e}{2}\Big)\dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)\Big\} = n^n e(1+o(1))\exp\{n\Big[1 + \log\Big(1 + \Big(\dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{2}\Big)\dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)\Big]\Big\} = en^n(1+o(1))\exp\{n\Big[1 + \Big(\dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{2}\Big)\dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big]\Big\} = en^n e^n e^{\frac{1}{e}-\frac{1}{2}}(1+o(1))$.

(10) Si ha

$$a_n = \frac{(n-\log n+2)^n(n+\log\log n)^n}{(n^2+5\log n)^n-(n^2+2)^n} \overset{(a)}{=} \frac{(1-\frac{\log n-2}{n})^n(1+\frac{\log\log n}{n})^n}{(1+\frac{5\log n}{n^2})^{2n}-(1+\frac{2}{n^2})^n} \overset{(b)}{=} \frac{\frac{e^2\log n}{n}(1+o(1))}{\frac{5\log n}{n}(1+o(1))} \to \frac{e^2}{5},$$

dove in (a) si è diviso numeratore e denominatore per n^{2n}, e in (b) si sono usati i risultati:
(i) $(1-\frac{\log n-2}{n})^n = \exp\big\{n\log\big(1-\frac{\log n-2}{n}\big)\big\} = \exp\big\{n\big(-\frac{\log n-2}{n}-\frac{(\log n-2)^2}{2n^2}+o\big(\frac{(\log n)^2}{n^2}\big)\big)\big\} = \exp\big\{-\log n+2+o(1)\big\} = \frac{e^2}{n}(1+o(1))$;
(ii) $(1+\frac{\log\log n}{n})^n = \exp\big\{n\log\big(1+\frac{\log\log n}{n}\big)\big\} = \exp\big\{n\big(\frac{\log\log n}{n}-\frac{(\log\log n)^2}{2n^2}+o\big(\frac{(\log\log n)^2}{n^2}\big)\big)\big\} = \exp\big\{\log\log n+o(1)\big\} = \log n(1+o(1))$;
(iii) $(1+\frac{5\log n}{n^2})^{2n} = \exp\big\{n\log\big(1+\frac{5\log n}{n^2}\big)\big\} = \exp\big\{n\frac{5\log n}{n^2}(1+o(1))\big\} = 1+\frac{5\log n}{n}(1+o(1))$;
(iv) $(1+\frac{2}{n^2})^n = \exp\big\{n\log\big(1+\frac{2}{n^2}\big)\big\} = \exp\big\{n\frac{2}{n^2}(1+o(1))\big\} = 1+\frac{2}{n}(1+o(1))$.

(11) Si ha

$$a_n = \frac{(2+n^{1/n})^n(\sqrt[3]{\sqrt{n}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{n}+1}\,)}{(1+2\pi^{1/n})^n+(1+\log n)^{\log n}} \overset{(a)}{=} \frac{3^n n^{1/3}(1+o(1))\frac{1}{3n^{1/3}}(1+o(1))}{3^n\pi^{2/3}(1+o(1))} \to \frac{1}{3\pi^{2/3}},$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $(2+n^{1/n})^n = \big(2+\exp(\frac{\log n}{n})\big)^n = \big(3+\frac{\log n}{n}+\frac{(\log n)^2}{2n^2}+o(\frac{(\log n)^2}{n^2})\big)^n = 3^n\exp\big\{n\log\big(1+\frac{\log n}{3n}+\frac{(\log n)^2}{6n^2}+o(\frac{(\log n)^2}{n^2})\big)\big\} = 3^n\exp\big\{n\big(\frac{\log n}{3n}+\frac{(\log n)^2}{6n^2}+o(\frac{(\log n)^2}{n^2})\big)\big\} = 3^n\exp\big\{\frac{1}{3}\log n+o(1)\big\} = 3^n n^{1/3}(1+o(1))$;
(ii) $\sqrt[3]{\sqrt{n}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{n}+1} = n^{1/6}\big(\sqrt[3]{1+\frac{2}{\sqrt{n}}}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\,\big) = n^{1/6}\big(1+\frac{2}{3\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})-1-\frac{1}{3\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})\big) = \frac{1}{3n^{1/3}}(1+o(1))$;
(iii) $(1+2\pi^{1/n})^n = \big(1+2\exp(\frac{\log\pi}{n})\big)^n = \big(3+\frac{2\log\pi}{n}+o(\frac{1}{n})\big)^n = 3^n\exp\big\{n\log\big(1+\frac{2\log\pi}{3n}+o(\frac{1}{n})\big)\big\} = 3^n\exp\big\{n\big(\frac{2\log\pi}{3n}+o(\frac{1}{n})\big)\big\} = 3^n\exp\big\{\frac{2}{3}\log\pi+o(1)\big\} = 3^n\pi^{2/3}(1+o(1))$;
(iv) $(1+\log n)^{\log n} = \exp\big\{\log n\log\big(1+\log n\big)\big\} = \exp\big(\log n\log\log n(1+o(1))\big) = o(3^n)$.

(12) Si ha

$$a_n = \frac{(2+8^{1/n})^n-2\cdot3^n}{(3n^{1/n}+\frac{1}{n})^n(\sqrt[n]{n^2+2n}-n^{2/n})} \overset{(a)}{=} \frac{3^n\frac{3(\log 2)^2}{n}(1+o(1))}{n3^ne^{1/3}(1+o(1))\frac{2}{n^2}(1+o(1))} \to \frac{3(\log 2)^2}{2e^{1/3}},$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $(2+8^{1/n})^n-2\cdot3^n = \big(2+\exp(\frac{\log 8}{n})\big)^n-2\cdot3^n = \big(3+\frac{3\log 2}{n}+\frac{9(\log 2)^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\big)^n-2\cdot3^n = 3^n\exp\big\{n\log\big(1+\frac{\log 2}{n}+\frac{3(\log 2)^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\big)\big\}-2\cdot3^n = 3^n\exp\big\{n\big(\frac{\log 2}{n}+\frac{3(\log 2)^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\big)\big\}-2\cdot3^n = 3^n\exp\big\{\log 2+\frac{3(\log 2)^2}{2n}+o(\frac{1}{n})\big\} = 2\cdot3^n\big\{\exp\big(\frac{3(\log 2)^2}{2n}(1+o(1))\big)-1\big\} = 3^n\frac{3(\log 2)^2}{n}(1+o(1))$;
(ii) $(3n^{1/n}+\frac{1}{n})^n = 3^n n\big(1+\frac{1}{3n^{1+1/n}}\big)^n = n3^n\exp\big\{n\log\big(1+\frac{1}{3n^{1+1/n}}\big)\big\} = n3^n\exp\big\{\frac{n}{3n^{1+1/n}}(1+o(1))\big)\big\} = n3^ne^{1/3}(1+o(1))$;
(iii) $\sqrt[n]{n^2+2n}-n^{2/n} = n^{2/n}\big(\sqrt[n]{1+\frac{2}{n}}-1\big) = (1+o(1))\big\{\exp\big(\frac{1}{n}\log(1+\frac{2}{n})\big)-1\big\} = (1+o(1))\big\{\exp\big(\frac{2}{n^2}(1+o(1))\big)-1\big\} = \frac{2}{n^2}(1+o(1))$.

(13) Si ha

$$a_n = \frac{\big(e^{3/n^2}-\cos(\frac{1}{2n})\big)^{n^2}}{\big(e^{2/n^2}-\cos(\frac{3}{2n})\big)^{n^2}} \overset{(a)}{=} \frac{\big(\frac{25}{8n^2}\big)^{n^2}\exp\big(\frac{1727}{1200}\big)(1+o(1))}{\big(\frac{25}{8n^2}\big)^{n^2}\exp\big(\frac{687}{1200}\big)(1+o(1))} \to e^{13/15},$$

dove in (a) si sono usati i risultati:

(i) $e^{\alpha/n^2} - \cos(\frac{\beta}{n}) = 1 + \frac{\alpha}{n^2} + \frac{\alpha^2}{2n^4} + o(\frac{1}{n^4}) - 1 + \frac{\beta^2}{2n^2} - \frac{\beta^4}{24n^4} + o(\frac{1}{n^4}) = \frac{2\alpha+\beta^2}{2n^2} + \frac{12\alpha^2-\beta^4}{24n^4} + o(\frac{1}{n^4}) = \frac{2\alpha+\beta^2}{2n^2}\big(1 + \frac{12\alpha^2-\beta^4}{12(2\alpha+\beta^2)n^2} + o(\frac{1}{n^2})\big)$;

(ii) $\big(e^{\alpha/n^2} - \cos(\frac{\beta}{n})\big)^{n^2} = \big(\frac{2\alpha+\beta^2}{2n^2}\big)^{n^2}\big(1+\frac{12\alpha^2-\beta^4}{12(2\alpha+\beta^2)n^2}+o(\frac{1}{n^2})\big)^{n^2} = \big(\frac{2\alpha+\beta^2}{2n^2}\big)^{n^2} \exp\big\{n^2 \log\big(1+\frac{12\alpha^2-\beta^4}{12(2\alpha+\beta^2)n^2}+ o(\frac{1}{n^2})\big)\big\} = \big(\frac{2\alpha+\beta^2}{2n^2}\big)^{n^2} \exp\big\{n^2\big(\frac{12\alpha^2-\beta^4}{12(2\alpha+\beta^2)n^2} + o(\frac{1}{n^2})\big)\big\} = \big(\frac{2\alpha+\beta^2}{2n^2}\big)^{n^2} \exp\big(\frac{12\alpha^2-\beta^4}{12(2\alpha+\beta^2)}\big)(1 + o(1)).$ $\square$