TEST DI GEOMETRIA 2, INGEGNERIA MECCANICA, 30/2/2014

Nome e matricola ....

Ogni test vale tre punti se vengono date **tutte e sole** le risposte corrette, vale zero punti altrimenti.

Test 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si consideri la base $\{(1,0,1),(-1,1,0),(0,-1,0)\}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(a) tale base è ortogonale;
(b) tale base è orientata positivamente;
(c) ortonormalizzando tale base con l'algoritmo di Gram-Schmidt si ottiene
$$\{(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),(-1/\sqrt{6},2/\sqrt{6},1/\sqrt{6}),(-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})\}\,;$$
(d) ortonormalizzando tale base con l'algoritmo di Gram-Schmidt si ottiene
$$\{(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}),(-1/\sqrt{6},2/\sqrt{6},1/\sqrt{6}),(1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})\}\,;$$

Test 2. Si consideri il vettore numerico $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})\in\mathbb{R}^2$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(a) $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ ha lunghezza 1 rispetto al prodotto scalare standard;
(b) $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ ha lunghezza 1 rispetto ad ogni prodotto scalare;
(c) esistono infinite matrici ortogonali aventi $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ come prima colonna;
(d) esiste una sola matrice ortogonale diretta avente $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ come prima riga.

Test 3. Si consideri l'affinità dello spazio euclideo $\mathbb{E}^2$ definita da
$$f(x,y):=(x/2-\sqrt{3}y/2,\ \sqrt{3}x/2+y/2-5/2)\,.$$
Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(a) f è un'isometria inversa;
(b) f è una rotazione antioraria di angolo $\pi/3$ intorno al punto di coordinate $(\sqrt{3},1)$;
(c) f è una riflessione ortogonale rispetto ad una determinata retta;
(d) f lascia invariata la retta di equazione $\sqrt{3}x+y-4=0$.

Test 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ la proiezione ortogonale sul piano di equazione $x-y+z-1=0$ è data da:

(a) $f(x,y,z)=\frac{1}{3}(2x+y-z-1,\ x+2y+z+1\,,-x+y+2z+1)$;
(b) $f(x,y,z)=\frac{1}{3}(2x+y-z+1,\ x+2y+z+1\,,-x+y+2z-1)$;
(c) $f(x,y,z)=\frac{1}{3}(2x+y-z+1,\ x+2y+z-1\,,-x+y+2z+1)$;
(d) $f(x,y,z)=\frac{1}{3}(2x+y-z-1,\ x+2y+z-1\,,-x+y+2z-1)$.

Test 5. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si considerino il triangolo T di vertici tre punti di coordinate $(-1,0,0)$, $(2,2,-1)$, $(-1,1,1)$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(a) T non esiste perché i tre punti sono allineati;
(b) l'area di T vale $\sqrt{3}/2$;
(c) l'area di T vale $3\sqrt{3}/2$;
(d) T è contenuto nel piano di equazione $x-y+z+1=0$.

Test 6. Si consideri la forma quadratica
$$2x^2+2xy+y^2+2z^2$$
in $\mathbb{R}^3$ e sia ϕ la forma bilineare simmetrica associata. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(a) la segnatura di ϕ è $(2,1)$;
(b) lo spazio ϕ-ortogonale al vettore $(1,1,1)$ è generato dai vettori $(4,-3,-3)$ e $(0,7,-7)$;
(c) il vettore $(1,0,2)$ è ϕ-isotropo;

(d) esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice $S_{\phi,\mathcal{B}}$ che rappresenta ϕ rispetto a $\mathcal{B}$ è data da
$$\begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 48\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1016/33 \end{pmatrix};$$

Test 7. Si consideri la conica $\mathcal{C}$ dello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$ definita da
$$f(x,y) := 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 10x + 6y - 10 = 0\,.$$
Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(a) $\mathcal{C}$ è degenere;
(b) $\mathcal{C}$ è a centro;
(c) il supporto di $\mathcal{C}$ consiste di una coppia di rette;
(d) $\mathcal{C}$ è una parabola.

Test 8. Si consideri la funzione
$$f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}\,, \quad f(t) := \frac{3}{2}\cos^2 t - 1\cos t \sin t + \frac{3}{2}\sin^2 t\,.$$
Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(a) f ammette sia massimo che minimo assoluti;
(b) se f realizza un massimo in θ_{max}, con $\theta < \pi$, allora lo realizza anche in $\theta_{max} + \pi$;
(c) f realizza un minimo in $\theta_{min} = 5\pi/4$;
(d) i punti stazionari di f sono esattamente otto.

Test 9. Sia assegnata una curva tramite rappresentazione paramentrica definita da
$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3\,, t \to (1+t,\ 1+3t+t^2,\ 1+2t+t^2)\,.$$
Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(a) la curva è biregolare;
(b) la curva è piana;
(c) il versore normale alla curva in $\alpha(2)$ appartiene al sottospazio vettoriale di equazione $2x+14y+12z = 0$;
(d) la retta di equazioni $2x - z - 1 = 0 = 2y - 3z + 1$ è tangente alla curva.

Test 10. Si consideri il luogo degli zeri $\mathcal{S} = \{F = 0\}$ della funzione
$$F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{R}\,, \quad (x,y,z) \to 2x^2 + 2y^2 - 3z^2\,.$$
Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

(a) $\mathcal{S}$ è una superficie regolarmente immersa.
(b) una rappresentazione regolare di $\mathcal{S} \cap \{z > 0\}$ è data $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{E}^3$, definita da
$$(\theta, t) \to \left(t\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta,\ t\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta,\ t\right);$$
(c) una curva coordinata per tale rappresentazione risulta essere $\{x = 0, 2z = 3y\} \cap \{z > 0\}$;
(d) un'equazione cartesiana del piano tangente a $\mathcal{S}$ nel punto di coordinate $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2)$ è data da $x + y - \sqrt{3}z = 0$.