

ALCUNE SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI PER LE VACANZE

Matematica di base, inverno 2014/2015

ESERCIZIO 1 Risolvere $2 \cos x + \sin^2 x - 1 = 0$.

SOLUZIONE Ricordando che $\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x$, si ha

$$\cos^2 x - 2 \cos x = 0.$$

Dunque le soluzioni sono $x = \pi/2 + k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$.

ESERCIZIO 2 Risolvere $\frac{\sin x - \frac{1}{2}}{3 \cos x} \geq 0$.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2 Il denominatore e il numeratore devono essere entrambi positivi o entrambi negativi. Inoltre il denominatore deve essere non nullo. Dunque le soluzioni sono

$$x \in [\pi/6 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi) \cup [\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi),$$

al variare di k in \mathbb{Z} .

ESERCIZIO 4 In quanti modi differenti si può formare una squadra di calcetto in una classe di 20 persone?

SOLUZIONE Mi dicono che a calcetto si gioca in 5. Dunque si ha $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5!} = \binom{20}{5}$.

ESERCIZIO In quanti modi differenti possono sedersi sette amici ad un tavolo con dieci posti ?

SOLUZIONE $10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 5 \cdot 4 = \frac{10!}{3!}$

ESERCIZIO 6b Scrivere il numero complesso

$$\frac{7}{3-i} + \frac{i}{5} - \frac{3}{i-2}$$

nella forma standard $a + ib$, con a parte reale e b parte immaginaria.

SOLUZIONE $\frac{33}{10} + \frac{3}{2}i$.

ESERCIZIO 8 Risolvere $3^{x^2-1} = 1$.

SOLUZIONE $x = \pm 1$

ESERCIZIO 10 Risolvere $\log x - \log(x - 1) = 2 \log x - \log(x^2 + 1)$.

SOLUZIONE Affinchè l'argomento di ogni singolo logaritmo sia positivo si deve imporre $x > 1$. Convieni riscrivere l'equazione come

$$\log x + \log(x^2 + 1) = \log x^2 + \log(x - 1)$$

da cui si ottiene $x^3 + x = x^3 - x^2$, ovvero $x^2 + x = 0$, che nel dominio $x > 1$ non ammette soluzioni.

ESERCIZIO 13

Produrre la contronominale e l'inversa della proposizione "Se piove, esco con l'ombrello". Aggiungendo la proposizione "Se vedo il sole, non mi porto l'ombrello", quali conclusioni si possono trarre?

SOLUZIONE Contronominale: "Se esco senza ombrello, non piove". Inversa: "Se esco con l'ombrello, allora piove". Conclusioni: "Se piove, non vedo il sole".