**Programma svolto nel corso di Geometria Differenziale, a.a. 21/22.**

Richiami sui gruppi topologici, proprietà locali e globali di sottogruppi, sottogruppi densi del toro reale bidimensionale. Richiami sulle varietà differenziabili, spazio tangente, differenziale di un'applicazione differenziabile, jacobiano, immersioni, sommersioni, sottovarietà immerse, sottovarietà embedded, rivestimenti lisci, sottoinsiemi di livello regolari e loro spazi tangenti. Il fibrato tangente. Campi vettoriali, parallelizzabilità e campi vettoriali globali, orientabilità, osservazioni sulle sfere. Bracket, gruppi ad un parametro locali, i.e. azioni locali di $\mathbb{R}/\mathbb{C}$: traiettorie locali, flusso locale. La derivata di Lie.

Gruppi di Lie, esempi, prime proprietà, alcuni teoremi fondamentali (senza dimostrazione). I gruppi di Lie sono parallelizzabili. Gruppi di Lie lineari e loro algebre di Lie. Ogni gruppo di Lie è localmente isomorfo ad un gruppo di Lie lineare. Mappa esponenziale di un gruppo di Lie e sue proprietà. Il caso dei gruppi di Lie lineari. Mappa esponenziale ed omomorfismi di Lie. Esempi e determinazione di alcune algebre di Lie. Azione di coniugio, rappresentazione aggiunta e suo differenziale: $\mathrm{ad}_X Y = [X, Y]$. Gruppi di Lie abeliani e algebre di Lie abeliane. L'algebra di Lie del centro di un gruppo di Lie e quella di un sottogruppo normale.

Varietà Riemanniane. Esempi e prime proprietà. Isometrie locali e globali. Immersioni e sommersioni isometriche. Brevi richiami sulla teoria dei rivestimenti. Rivestimenti normali e gruppo delle trasformazioni di rivestimento. Azioni di reivestimento e separabilità del quoziente. Azioni proprie e loro proprietà. Le azioni di rivestimento per isometrie sono proprie. Esempi. Metrica standard su tori, spazi proiettivi reali, spazi proiettivi complessi. La distanza indotta da una metrica Riemanniana induce la topologia. Forme di volume invarianti su un gruppo di Lie, integrale di Haar, metriche bi-invarianti. Metrica standard su $U_n$. Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una metrica bi-invariante su un gruppo di Lie.

Connessioni affini, connessione standard di $\mathbb{R}^n$ e di sottovarietà embedded. Derivata covariante. Parallelismo e trasporto parallelo. Condizioni equivalenti di compatibilità di una connessione affine con una metrica Riemanniana. Esistenza ed unicità della connessione di Levi-Civita. Coefficienti di Christoffel. Trasporto parallelo per varietà tra loro tangenti lungo una curva: esempi. Geodetiche, esponenziale Riemanniano, flusso geodetico: proprietà ed esempi. Il caso dei gruppi di Lie che ammettono una metrica bi-invariante.

Palle geodetiche, palle fortemente geodetiche, palle geodeticamente convesse. Lemma di Gauss. Geodetiche minimali; quelle corte lo sono. Le curve minimali sono geodetiche. Le geodetiche del (semi)piano iperbolico. Spazi Riemanniani completi. Il teorema di Hopf-Rinow e sue conseguenze. Accenni sul cut locus di una varietà Riemanniana completa e compatta. Il gruppo delle isometrie di $(M, g)$: rappresentazioni di isotropia e dimensione massima, casi di $\mathbb{E}^n$, $S^n$, $\mathbb{H}^n$.

Operatore e tensore di curvatura: prime proprietà e descrizione in coordinate locali. Identita' di Bianchi, (anti)simmetrie. Curvatura sezionale vs. curvatura di Gauss. La curvatura sezionale determina univocamente il tensore di curvatura: nuovamente i casi di $\mathbb{E}^n$, $S^n$, $\mathbb{H}^n$. Calcolo della curvatura sezionale per i gruppi di Lie che ammettono metrica bi-invariante. Curvatura di Ricci e curvatura scalare.

Campi di Jacobi: esistenza e unicità. Formano uno spazio vettoriale di dimensione $2n$. Loro espressione particolare per varietà Riemanniane con curvatura sezionale costante. Norma di $J(t)$ vs. $K(\sigma)$. Il teorema di Hadamard-Cartan. Il teorema di Bonnet-Myers (senza dimostrazione). Conseguenze sui gruppi di Lie che ammettono metrica bi-invariante e loro realizzazione come spazi simmetrici. Theorema di Cartan-Riemann. Classificazione locale delle varietaà Riemanniane con curvatura sezionale costante, classificazione delle varietà Riemanniane complete e semplicemente connesse con curvatura sezionale costante.