COGNOME .... NOME ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO.

Esercizio 1 (punti 4). Sia A una matrice reale 7×5 di rango massimo e sia B un vettore colonna 7×1.

(i) Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = O$.
(ii) Indicare una condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema $AX = B$ sia compatibile.
(iii) Stabilire per quali vettori colonna B il vettore $(1, 1, 0, \dots, 0)$ è soluzione del sistema $AX = B$.

Esercizio 2 (punti 4). Nello spazio numerico reale $\mathbb{R}^4$, munito del prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio vettoriale W generato dai vettori $(2, 0, 2, 0)$ e $(1, 3, 1, 3)$. Si determini una base ortonormale del sottospazio $W^\perp$ ortogonale a W.

Esercizio 3 (punti 5). Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ sono assegnate la retta r, di equazioni $x_1 + x_3 = 1 = x_2$, e la retta s per il punto di coordinate $(1, 0, 0)$ e parallela al vettore di coordinate $(0, 3\pi, 0)$.

(i) Stabilire se r ed s sono incidenti, parallele o sghembe, motivando la risposta.

(ii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano π per il punto di coordinate $(2, 2, -2)$ e ortogonale ad r.

(iii) Calcolare la distanza di s da π.

Esercizio 4 (punti 6). Determinare un'isometria lineare $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ che trasformi il vettore $(0, 5, 5)$ nel vettore $(5, 5, 0)$, indicando la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica. Una tale isometria è necessariamente diretta o necessariamente inversa? Motivare la risposta.

Esercizio 5 (punti 6). Si consideri l'operatore lineare $L : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ definito da

$$L(0,3,3) = (0,6,6), \qquad L(3,3,3) = (0,6,6), \qquad L(0,0,1) = (0,2,0)\,.$$

(i) Determinare la matrice che rappresenta L rispetto alla base canonica.
(ii) Se possibile, diagonalizzare L, altrimenti indicare un autovettore di L.
(iii) Mostrare che se v è un vettore ortogonale a $(0,1,1)$, allora $L(v)$ è ortogonale a $(1,1,1)$.

Esercizio 6 (punti 5). Si consideri la conica euclidea $\mathcal{C}$ di equazione $2x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$.

(i) Classificarla.
(ii) Determinarne il centro, equazioni parametriche di un suo asse di simmetria e le intersezioni di $\mathcal{C}$ con tale asse.