COGNOME . . . . NOME . . . . MATRICOLA . . . .

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO.

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^5$ si considerino i sottospazi vettoriali $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$: $3x_1 + 4x_2 = 0 = 3x_4 + 4x_5\}$ e $V := \text{Span}\{(0, 0, 1, 1, -1)\,(0, 0, 0, 3, -2)\}$.

(i) Determinare la dimensione dell'intersezione $U \cap V$.

(ii) Determinare una base ortonormale della somma $U + V$.

(iii) Determinare una base dello spazio $(U + V)^{\perp}$ ortogonale alla somma $U + V$.

Esercizio 2. Si discuta la compatibilità del sistema lineare $\begin{cases} x + y + az = a \\ 3x - z = 0 \\ x - 2y + z = -2a \\ x + y - z = a \end{cases}$ nei due distinti casi $a = 0$ e $a = -1$. Ove compatibile, si determini l'insieme delle soluzioni tramite equazioni parametriche.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ sia π il piano contenente il punto di coordinate $A = (2, 0, 1)$ e ORTOGONALE alla retta r di equazioni cartesiane $x + y + z = 1,\ 2x - y + 2z = 5$.

(i) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano π.

(ii) Determinare l'intersezione $B := \pi \cap r$ e mostrare che per ogni pundo C di r si ha $d(A, B) \leq d(A, C)$.

(iii) Determinare equazioni per la circonferenza di centro A contenuta in π e intersecante r.

Esercizio 4. Si scelga un'isometria INVERSA $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ che trasformi la retta di equazioni $x+y+z = 0 = 2x + 4y + 2z$ nella retta di equazioni $2x + 2y + 2z = 0 = 3x + 3y + 7z$. Si determini la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica.

Esercizio 5. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo che lascia fissi tutti i vettori del sottospazio vettoriale di equazione $x - 2y + 3z = 0$ e trasforma il vettore $(2, -4, 6)$ nel vettore $(-1, 2, -3)$.

(i) Si determini la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica.

(ii) Stabilire se L è diagonalizzabile. In caso affermativo determinarne una base diagonalizzante e la matrice che rappresenta L rispetto a tale base.

(iii) Richiamare la definizione di endomorfismo autoaggiunto e stabilire se F è un endomorfismo autoaggiunto.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^2$ si consideri l'ellisse $\mathcal{C}$ di fuochi $F_1 = (1,\ 7)$ e $F_2 = (7,\ 7)$, passante per il punto di coordinate $(4, 3)$.

(i) Determinare un'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$.

(ii) Determinare un'equazione cartesiana della forma canonica $\mathcal{C}'$ di $\mathcal{C}$.

(iii) Determinare un isometria che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}'$.