COGNOME . . . . NOME . . . . MATRICOLA . . . .

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO.

Esercizio 1.

i) Mostrare che i vettori $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,3,0)$ dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ sono linearmente independenti.

ii) Implementare l'algoritmo di Gram-Schmidt al fine di ottenere un base ortonormale $\{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{E}^3$ dove $w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$.

iii) Determinare la matrice che rappresenta, rispetto alla base canonica, la proiezione ortogonale sul sottospazio vettoriale $\mathrm{Span}\{v_2, v_3\}$.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale t si consideri il sistema lineare $\begin{cases} x+y-3z = t-1 \\ x+y-tz = 2 \\ 2x+ty+z = 1 \end{cases}$

(i) Determinare i valori di t per cui il sistema risulta essere compatibile.

(ii) Per tali valori, determinare l'insieme di tutte le soluzioni.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, si considerino la retta r definita dalle equazioni $x + y - z = 2$, $2x + z = 1$, e la retta s definita dalle equazioni parametriche $(x, y, z) = t(3, 1, 1) + (1, 0, 0)$.

(i) Determinare la posizione reciproca di r e s.

(ii) Indicare equazioni cartesiane del piano π per il punto $(2, 1, 0)$ e ortogonale a r.

(iv) Discutere la posizione reciproca del piano π e della retta s. Nel caso tali sottospazi affini si intersechino, determinare la loro intersezione.

Esercizio 4. Scegliere un'isometria DIRETTA $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ che trasformi il piano di equazione $2y + z = 0$ in quello di equazione $y = 0$. Si determini la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica. di $\mathbb{E}^3$.

Esercizio 5. Sia $L : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ l'applicazione lineare definita da $L(x,\, y,\, z) = (2x{+}y{+}z,\, 3y{-}z,\, -y{+}3z)$ e sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{E}^3$ definito da $W := \{(x, y, z)\ :\ y + z = 0\,\}$.

(i) Si determini una base per ogni autospazio di L e si stabilisca se L e' diagonalizzabile.

(ii) Mostrare che $L(W) = W$ e si stabilisca se la restrizione $F := L|_W : W \to W$ di L a W definisce un operatore simmetrico.

(iii) Mostrare che l'operatore $F^4 := F \circ F \circ F \circ F$ e' diagonalizzabile e determinare i suoi autovalori.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^2$ si considerino i punti $A = (1, -1)$ e $B = (-2, -4)$.

(i) Determinare un'isometria di $\mathbb{E}^2$ che trasformi A e B nei punti $F_1 = (c, 0)$ e $F_2 = (-c, 0)$, dove il valore di c sarà scelto opportunamente.

(ii) Determinare le equazioni dell'ellisse $\mathcal{C}$ per il punto $(-2, -1)$ e di fuochi A e B.

(iii) Determina l'eccentricità e di $\mathcal{C}$ (si ricordi che $e = c/a$).