COGNOME .... NOME .... MATRICOLA ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO.

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ sono assegnati i sottospazi vettoriali

$U := Span\{(0,2,1,3),\,(0,1,-1,0),\,(1,1,1,0)\}$ e $W := \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\ :\ x_1+x_3+x_2+x_4=0\}$.

(i) Determinare una base dell'intersezione $U \cap W$ ed una della somma $U + W$.
(ii) Determinare una base dei sottospazi $U^\perp$ e $W^\perp$ ortogonali ad U e W, rispettivamente.
(iii) Scegliere due vettori $v_1 \in U^\perp$ e $v_2 \in W^\perp$, tali che $< v_1,\, v_2 >= 288$.

Esercizio 2. Si discuta la compatibilità del sistema lineare $\begin{cases} 3x+(2+a)y-(1+3a)z=1 \\ x-2y+3z=0 \\ (2+a)x+3y-4z=2-a \\ 5x-y+2z=1 \end{cases}$ nei due distinti casi $a=0$ e $a=1$. Ove compatibile, si determinino equazioni parametriche dello spazio delle soluzioni.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ sia π il piano per i punti di coordinate $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$ e $C = (2, 1, 3)$ ed r la retta per A perpendicolare a π.

(i) Determinare equazioni parametriche e cartesiane sia del piano π che della retta r.

(ii) Mostrare che il piano σ di equazione $x + y + z = 0$ non è parallelo alla retta r. Determinare le coordinate dell'intersezione $D := \sigma \cap r$.

(iii) Determinare un'equazione della sfera di centro D tangente a π e un'equazione della sfera di centro C tangente a σ.

Esercizio 4. Sia W il sottospazio di $\mathbb{E}^3$ di equazioni $4x + y + 3z = 0 = 4x - y + 3z$. Scelta un'isometria INVERSA $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ che fissa tutti i punti di W, si determini la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica.

Esercizio 5. Sia $L : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ l'operatore lineare rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare una base di ogni autospazio di L e discutere la diagonalizzabilità di L.

(ii) Mostrare che $W = \{(x, y, z) \;:\; x = z\}$ definisce un sottospazio vettoriale L-invariante, ovvero che $L(W) \subseteq W$.

(iii) Scelta una base di W, si determini la matrice che rappresenta la restrizione $L|_W : W \to W$ di L a W rispetto a tale base.

(iv) Mostrare che $L|_W : W \to W$ è diagonalizzabile e determinare una base diagonalizzante.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^2$ si consideri la parabola $\mathcal{C}$ di fuoco $F = (1, 7)$ e direttrice di equazione $3x - 4y = 0$.

(i) Determinare un'equazione di $\mathcal{C}$.

(ii) Determinare un'equazione della forma canonica $\mathcal{C}'$ di $\mathcal{C}$.

(iii) Determinare un isometria che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}'$.