COGNOME . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . NOME . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . MATRICOLA . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO.

**Esercizio 1.** Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ sono assegnati i sottospazi vettoriali

$$U := Span\{(1,2,0,3),(1,-1,0,0)\} \qquad \text{e} \qquad W := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \ : \ x_1+x_3=0=x_2-x_4\} \ .$$

(i) Determinare una base dell'intersezione $U \cap W$ ed una della somma $U+W$.
(ii) Determinare una base dei sottospazi $U^\perp$ e $W^\perp$ ortogonali ad $U$ e $W$, rispettivamente.
(iii) Stabilire se $U^\perp$ e $W^\perp$ sono in somma diretta.

**Esercizio 2.** Si discuta la compatibilità del sistema lineare $\begin{cases} y+az=a \\ ax+4y+4z=a \\ x+ay+az=1 \end{cases}$ nei due distinti casi $a=2$ e $a=-2$. Ove compatibile, determinare delle equazioni parametriche dello spazio delle soluzioni.

**Esercizio 3.** Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ sono assegnate la retta $r$, di equazioni $x + z = 7, y = 0$, ed il piano $\pi$ di equazione $3x - 4y = 0$. Si considerino i punti $A := r \cap \pi$ e $B := r \cap \{z = 0\}$.

(i) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta per $A$ e ortogonale a $\pi$.
(ii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano $\sigma$ per $B$ e parallelo a $\pi$.
(iii) Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B, C, dove C è il punto di coordinate $(1, 0, 1)$.

**Esercizio 4.** Sia $W$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{E}^3$ definito da $4x - 3z = 0$ e sia $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la riflessione ortogonale rispetto a $W$. Determinare la matrice che rappresenta $F$ rispetto alla base canonica.

**Esercizio 5.** Sia $L : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ l'operatore lineare rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se il nucleo è ortogonale all'immagine, determinando una base sia dell'uno che dell'altra.
(ii) Stabilire se l'applicazione $L$ è diagonalizzabile ed in caso affermativo determinarne una base diagonalizzante.
(iii) Dato un numero intero $n$, determinare la matrice che rappresenta $L^n := L \circ \cdots \circ L$ rispetto alla base canonica.

**Esercizio 6.** Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^2$ sono assegnati i punti $F_1 = (1, 1)$ e $F_2 = (9, 7)$.

(i) Determinare un'equazione dell'ellisse $\mathcal{C}$ di fuochi $F_1$ e $F_2$ passante per il punto $A = (8, 0)$.
(ii) Stabilire se l'ellisse $\mathcal{C}$ è isometrica all'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$$

motivando con chiarezza la risposta.