COGNOME . . . . NOME . . . . MATRICOLA . . . .

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO.

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ sia U il più piccolo sottospazio vettoriale contenente sia il vettore $(1,1,0,0)$ che i vettori di $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 = 3x_3 + x_4\}$. Sia inoltre $V := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 \ : \ x_1 + x_3 = 0\}$.

(i) Determinare una base ortonormale di $U \cap V$.
(ii) Determinare una base dello spazio $U^\perp$ ortogonale a U.
(iii) Determinare delle equazioni per la somma $(U \cap V) + U^\perp$.

Esercizio 2. Al variare di t nel campo dei numeri reali, si consideri la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & t \\ 2 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Stabilire per quali valori di t la matrice è invertibile.
(ii) Fissato $t = 0$, determinarne l'inversa.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si considerino la retta r, di equazioni cartesiane $x+y+2z=1,\ x+2y+2z=0$ e la retta s per $A=(1,1,1)$ e vettore direttore $(0,3,3)$.

(i) Discutere la posizione reciproca di tali rette e determinare equazioni cartesiane della retta s.

(ii) Discutere l'esistenza di una retta ortogonale e incidente entrambe le rette, quindi determinarne equazioni cartesiane.

(iii) Determinare la distanza tra r ed s.

Esercizio 4. Sia $F:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ una delle due possibili rotazioni ortogonali di angolo $2\pi/3$ intorno all'asse di equazione $2x+4y-z=0=4x-5y-2z$. Si determini la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica.

Esercizio 5. Sia $V := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_3 + x_4 = 0\}$ e. $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1\,,\, 2x_2 + x_3\,,\, -x_1 - x_3\,,\, x_1 + 2x_3 + x_4)$.

(i) Si mostri che $L(V) \subset V$ e si determini la matrice che rappresenta, rispetto ad una base scelta, la restrizione $L|_V : V \to V$ di L a V.

(ii) Stabilire se $L|_V$ è diagonalizzabile. In caso affermativo determinarne una base diagonalizzante.

(iii) Mostrare che esiste un autovetture di L che non è contenuto in V. Cosa si può concludere sulla diagonalizzabilità di L?

Esercizio 6. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^2$ sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 32 = 0$.

(i) Determinare un'equazione cartesiana della forma canonica $\mathcal{C}'$ di $\mathcal{C}$.

(ii) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}'$.

(iii) Determinare equazioni parametriche di un asse di simmetria di $\mathcal{C}$.