COGNOME . . . . NOME . . . . MATRICOLA . . . .

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI A4.

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{E}^5$ (quindi dimensione **5**) si considerino i sottospazi vettoriali $W = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \; : \; x_1 + x_2 + x_4 = 0 = x_2 - x_4 \}$ e $U = \text{Span}\{e_1, e_2, e_4\}$.

i) Determinare una base ortonormale di $U \cap W$ e una base ortonormale di $U + W$.

ii) Individuare, esibendo due basi, due distinti supplementari S e T di W.

iii) Scegliere un vettore $u \in U$ ed un vettore $w \in W$ in maniera che formino un angolo di $\pi/6$.

Esercizio 2. Sia $A \in M^{3\times 3}(\mathbb{R})$ e, al variare di $a \in \mathbb{R}$, sia $B = {}^t(a, 2a, 3a)$. Si consideri il sistema lineare $AX = B$.

i) Dimostrare che se il sistema è compatibile per $a = 1$, allora è compatibile anche per $a = -1$.

ii) Esibire esplicita A di **rango due** tale che il sistema sia NON compatibile per ogni $a \neq 0$.

iii) Risolvere il sistema nel caso particolare in cui $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. In $\mathbb{E}^3$ si consideri il sottospazio vettoriale W generato dai vettori $(1,1,1)$ e $(0,0,3)$. Sia $W^\perp$ il supplementare ortogonale a W.

i) Scegliere un'isometria lineare F di $\mathbb{E}^3$ tale che $W^\perp \subset F(W)$, indicandone esplicitamente la matrice rappresentativa rispetto alla base canonica.

ii) Dimostrare che per ogni siffatta isometria F si ha $F(W^\perp) \subset W$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ sia r la retta di equazioni $x + 2y = 0 = x - 2y + 5z$ e sia s la retta di equazioni $2x + 4y + 10 = 0 = 2y + \sqrt{3}z$.

(i) Determinare equazioni sia **parametriche** che **cartesiane** della retta t, ortogonale sia ad r che ad s, contenente il punto di coordinate $(10, -20, 0)$ (quindi t deve soddisfare tre condizioni).

(ii) Calcolare la distanza tra r ed s.

(iii) Determinare equazioni della sfera $\mathcal{S}$ centrata nell'origine e tangente alla retta s.

Esercizio 5. Sia assegnata la base $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ di $\mathbb{E}^4$ e sia $L : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ l'unica applicazione lineare tale che

$$L(b_1 + b_2) = b_3 - b_4 \,, \qquad L(b_1 - b_2) = b_3 + b_4$$

e $L \circ L = Id$.

(i) Determinarne polinomio caratteristico, autovalori e autospazi. Nel caso L sia diagonalizzabile, scegliere una base diagonalizzante.

(ii) Esibire una rappresentazione matriciale di L^{-1} e di $L^5 := L \circ L \circ L \circ L \circ L$.

(iii) Assumendo che la base $\mathcal{B}$ sia ortonormale, si mostri che per ogni vettore $u \in \mathbb{E}^4$ vale l'identità $L(u^\perp) = L(u)^\perp$, dove $u^\perp := \{\, v \in \mathbb{E}^4 \ : < v, u >_{st} = 0 \,\}$ e $L(u)^\perp := \{\, v \in \mathbb{E}^4 \ : < v, L(u) >_{st} = 0 \,\}$.