COGNOME .... NOME .... MATRICOLA ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare, complete e sintetiche.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO.

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ sia W il sottospazio vettoriale di equazioni $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 \ : \ x_1 + x_2 = 0, x_4 = 0\}$, sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $\{(-1, -4, 0, 2), \ (3, 2, 0, -2)\}$ e sia H l'iperpiano di equazione $x_4 = 0$.

i) Determinare una base ortonormale di $U \cap W$ e una base ortonormale del supplementare ortogonale a $U \cap W$.
ii) Dopo averne calcolato le rispettive dimensioni, determinare una base ortonormale di $U + W$ e una base ortonormale di $U + H$.
iii) Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $(1, 1, 1, 1)$ sul sottospazio W.

Esercizio 2. Siano $(2, 1, 2, 1)$ e $(1, 1, 1, 1)$ due soluzioni del sistema lineare reale $AX = B$ in 4 incognite e di rango 3.

(i) Determinare tutte le soluzioni del sistema $AX = B$.
(ii) Indicare esplicitamente un sistema lineare omogeneo $A'X = 0$ equipollente al sistema lineare omogeneo $AX = 0$.
(iii) Indicare esplicitamente un sistema lineare $A'X = B'$ equipollente al sistema $AX = B$.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ siano π e σ due piani tra loro ortogonali con $A = (1, 4, 1) \in \pi \cap \sigma$ e il vettore $v = (0, 1, 0)$ appartenente alle giaciture di entrambi i piani. Dato b reale, sia $B = (b, 0, 0)$.

(i) Determinare tutti i valori di b per i quali $d(B, \pi \cap \sigma) = \sqrt{2}$.

(ii) Determinare equazioni cartesiane sia di π che di σ nel caso in cui $(-6, 0, 1) \in \pi$.

(iii) Determinare equazioni cartesiane del piano contente l'intersezione $\pi \cap \sigma$ e il punto $C = (0, 0, 2)$.

Esercizio 4. Si scelga una isometria lineare $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ che trasforma il piano U di equazione $x_1 + 3x_3 = 0$ nel sottospazio vettoriale di equazione $x_1 = 0$ e il piano W di equazione $3x_1 - x_3$ nel sottospazio vettoriale di equazione $x_3 = 0$. Si determini la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica di $\mathbb{E}^3$ (sugg. accennare un disegno dei piani in gioco). Quante isometrie non dirette con queste proprietà esistono?

Esercizio 5. Fissata una base $\mathcal{B} = \{v_2,\, v_2,\, v_3\}$, di $\mathbb{E}^3$, sia $L : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ l'operatore lineare rappresentato rispetto a $\mathcal{B}$ da

$$M_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinarne una base del nucleo K e una base dell'immagine I.

(ii) Mostrare che $L(I) = I$ e determinare autovalori e autospazi della restrizione $L|_I : I \to I$ di L ad I. Dedurne la diagonalizzabilità di L.

(iii) Posto $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, scegliere v_2 e v_3 in maniera che L sia autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard.

(iv) Dati $v_2,\, v_2,\, v_3$ come in (iii), mostrare che K e I sono ortogonali rispetto al prodotto scalare standard.