COGNOME . . . . NOME . . . . MATRICOLA . . . .

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI A4.

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{E}^4$ sia W il sottospazio vettoriale generato dai vettori $(1,0,-1,0)$, $(2,1,1,0)$, $(0,1,-1,0)$, $(1,1,1,0)$ e sia U il sottospazio vettoriale definito dalle equazioni $x_1 = x_2 = 0$.

i) Si applichi Gram-Schmidt al fine di trovare una base ortonormale di W il cui primo vettore sia $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)$.

ii) Determinare una base dell'intersezione $W \cap U$ e della somma $W + U$.

iii) Determinare due distinti sottospazi supplementari di W. Il numero di supplementari distinti di W è finito o infinito?

Esercizio 2. Al variare del parametro reale h si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} -2x - z = h \\ hx - 8y + z = -2 \\ -x + hy = -1 \end{cases}$$

(i) Determinare, se esistono, tutti i valori reali di h e di s per i quali $P = (1, 0, s)$ risulta essere soluzione di tale sistema.

(ii) Indicare i valori del parametro h per i quali il sistema ammette una soluzione, nessuna soluzione, almeno due soluzioni distinte.

(iii) Risolvere il sistema per i valori di h per i quali esistono almeno due soluzioni distinte.

Esercizio 3. Sia $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ l'unica rotazione (lineare) intorno ad un asse di dimensione 1 che trasforma il vettore $(2, 0, 2)$ nel vettore $(0, 2\sqrt{2}, 0)$ e il vettore $(0, -2, 0)$ nel vettore $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$. Determinare una base dell'asse di rotazione e la matrice che la rappresenta F rispetto alla base canonica di $\mathbb{E}^3$.

Esercizio 4. In $\mathbb{E}^3$ sia r la retta per i punti $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 2, 1)$ e sia s la retta di equazioni cartesiane $y = 0 = x + z + 2$.

(i) Si scrivano equazioni parametriche sia di r che di s.
(ii) Si determini la posizione reciproca di r e di s, specificando se sono parallele, incidenti o sghembe.
(iii) Si trovi la retta h passante per $C = (1, 0, 0)$ e ortogonale sia ad r che ad s.
(iv) Determinare la distanza di $D = (1, 5, -2)$ dalla retta s.

Esercizio 5. Sia $L : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ l'applicazione definita da $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ x_1 + 2x_2 - x_3,\ 3x_3)$.

(i) Determinare gli autovalori e gli autospazi di L. Stabilire quindi se L è diagonalizzabile, indicando una base di autovettori.

(ii) Calcolare senza troppo sforzo, ovvero utilizzando i risultati dei punti precedenti, la matrice che rappresenta la potenza $L^n = L \circ \cdots \circ L$, per n intero arbitrario, rispetto alla base canonica.

(iii) Esistono interi n tali che L^n sia autoaggiunto rispetto al prodotto scalare canonico? Motivare esaurientemente la risposta.