COGNOME . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . NOME . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . MATRICOLA . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI A4.

**Esercizio 1.** Sia $W$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{E}^4$ definito dall'equazione $x_1 - x_2 = 0$ e sia $W^\perp$ il sottospazio vettoriale ortogonale a $W$.

i) Trovare una base ortonormale di $W$ e completarla ad una base ortonormale di $\mathbb{E}^4$.

ii) Descrivere l'insieme $C$ di tutti i vettori di $\mathbb{E}^4$ che non appartengono all'unione (insiemistica) $W \cup W^\perp$ in termini dei loro coefficienti rispetto alla base di $\mathbb{E}^4$ trovata in i). Indicare quindi un vettore di $C$ che formi un angolo di ampiezza $\pi/4$ con tutti i vettori non nulli di $W^\perp$.

iii) Scegliere un operatore autoaggiunto $L\colon \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ la cui immagine coincida con $W$ e tale che $L(1,1,0,0) = (0,0,1,1)$, indicandone esplicitamente la matrice che lo rappresenta rispetto alla base di $\mathbb{E}^4$ trovata al punto i).

**Esercizio 2.** In $\mathbb{R}^4$ sia $S_\lambda$ l'insieme delle soluzioni delle due equazioni $x + (\lambda+1)y + (\lambda^2 - 1)z + \lambda w = 2$ e $x - w = 0$, al variare del parametro reale $\lambda$.

i) Determinare tutti i valori di $\lambda$ per i quali l'insieme $S_\lambda$ è non vuoto, ben giustificando la risposta.
ii) Risolvere il sistema nel caso di $\lambda = 0$.
iii) Sia $V = \text{Span}\big((0,1,2,0),(0,3,4,0)\big)$. Trovare tutti i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali $V \cap S_\lambda$ è una retta. Fornire equazioni cartesiane della retta $r$ parallela a $V \cap S_1$ e passante per il punto $(0,0,0,1)$.

**Esercizio 3.** Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di vettori unitari di $\mathbb{E}^3$ tali che $\langle v_1, v_2\rangle_{st} = 0 = \langle v_1, v_3\rangle_{st}$ e anche $\langle v_2, v_3\rangle_{st} = 1/2$. Sia $R$ la riflessione ortogonale rispetto al sottospazio $\text{Span}\{v_1, v_2\}$. Determinare la matrice che rappresenta $R$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ (sugg. scegliere una più comoda base $\mathcal{B}$ e poi effettuare il necessario cambio di base. Oppure, determinare direttamente e correttamente le immagini dei vettori $v_1, v_2, v_3$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Come sempre, un disegno ben realizzato sarà certamente di aiuto).

**Esercizio 4.** Nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$ si considerino i punti $A = (0,0)$, $B = (4,0)$ e $C = (0,3)$.

(i) Trovare il punto $P$ tale che $d(P,A) = d(P,B) = d(P,C)$.

(ii) Descrivere in forma cartesiana tutte le rette che, oltre a contenere $B$, formano un angolo di $\pi/4$ con la retta per i punti $B$ e $C$.

(iii) Calcolare la proiezione ortogonale $H$ di $B$ sulla retta per $A$ e $P$. Quindi calcolare l'area del triangolo $\widehat{ABH}$.

(iv) Passiamo ora allo spazio euclideo. In $\mathbb{E}^3$ si considerino i punti $D = (0,0,0)$, $F = (1,0,0)$ e $G = (0,9,0)$. Descrivere in forma parametrica l'insieme dei punti $Q$ tali che $d(Q,D) = d(Q,F) = d(Q,G)$.

**Esercizio 5.** Sia $L : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ l'endomorfismo definito da $L(x, y, z, w) = (x, y + w - x, y + w + z, z)$,

(i) Dopo aver determinarto una base di $\mathrm{Ker}(L)$ e una base di $\mathrm{Im}(L)$, stabilire se i due sottospazi sono in somma diretta.

(ii) Determinare una base per ogni autospazio di $L$ e decidere se $L$ è diagonalizzabile.

(iii) Scelto un intero $n > 1$, esibire un esplicito endomorfismo $F : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ tale che $\mathrm{Ker}(F)$ e $\mathrm{Im}(F)$ NON siano in somma diretta.