COGNOME . . . . NOME . . . . MATRICOLA . . . .

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI A4.

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale W ORTOGONALE sia al vettore $v_1 = (3, 0, -4, 0)$ che al vettore $v_2 = (0, -1, 1, 0)$.

i) Determinare una base ortonormale di W. Determinare una base ortonormale del supplementare $W^\perp$ ortogonale a W.

ii) Determinare un sottospazio U di dimensione 3 tale che $U + W = \mathbb{R}^4$.

iii) Determinare due vettori linearmente indipendenti u_1 e u_2 entrambi formanti un angolo di ampiezza $\pi/3$ con il vettore v_1.

Esercizio 2. Sia $AX = B$ un sistema lineare a coefficienti reali il cui insieme delle soluzioni è una retta r di $\mathbb{R}^4$.

(i) Stabilire quel'è il numero minimo di equazioni presenti in un tale sistema. Esiste un numero massimo?

(ii) Scegliere e indicare esplicitamente, una matrice A e una colonna B tali che r abbia equazioni parametriche $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, 3, 4) + t(0, 0, 0, 1)$.

(iii) Determinare equazioni cartesiane della retta di $\mathbb{R}^4$ contenente il punto di coordinate $(4, 3, 2, 1)$ e parallela alla retta r indicata in (ii).

Esercizio 3. Sia $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la riflessione rispetto al sottospazio vettoriale di equazione $x - z = 0$ e sia $G : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ una rotazione (ortogonale) di 45^0 intorno all'asse generato dal vettore $(2, 0, -2)$. Si determini la matrice che rappresenta la composizione $F \circ G$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{E}^3$.

Esercizio 4. In $\mathbb{E}^3$ si consideriono i punti $C = (3, 0, 3)$, $T = (6, 0, 3)$, $A = (6, 0, 0)$ e $B = (6, 2, -2)$.

(i) Calcolare l'area del triangolo $\widehat{TAB}$ e indicare equazioni cartesiane del piano π contenente tale triangolo.

(ii) Fornire equazioni per la sfera $\mathcal{S}$ di centro C e raggio 3. Mostrare che il piano π è tangente a $\mathcal{S}$.

(iii) Nel fascio proprio di piani contenenti i punti C e T, determinare il piano ortogonale al vettore TB fornendone esplicite equazioni cartesiane.

Esercizio 5. Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{E}^3$ e sia $L : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ l'unico endomorfismo tale che

$$L(e_1 + e_2) = e_1 - e_2\,, \quad L(e_1 + e_3) = e_1 - e_3\,, \quad L(e_2 + e_3) = e_2 - e_3\,.$$

(i) Determinare la matrice che rappresenta L rispetto alla base $\mathcal{E}$.

(ii) Determinare una base del nucleo e un base dell'immagine di L. Quindi stabilire se tali sottospazi sono in somma diretta.

(iii) Stabilire se l'endomorfismo L è diagonalizzabile e in caso affermativo determinarne una base diagonalizzante.

(iv) Determinare tutti i vettori appartenenti al sottoinsieme $F^{-1}((0, 3, -3))$. Mostrare che tale sottoinsieme è un sottospazio affine di $\mathbb{E}^3$ e indicarne la dimensione.