COGNOME .... NOME .... MATRICOLA ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI A4.

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 e sia $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ una sua base. Siano $u := b_1 - b_2 + b_3 - b_4$, $v := b_1 + b_2$ e $U := Span\{u, v\}$.

i) Determinare una base di U.

ii) Considerato il vettore $u(k) := 2b_1 + kb_2 - b_3 + b_4$, con k parametro reale, determinare i valori di k per i quali $u(k) \in U$.

iii) Completare la base di U trovata in i) ad una base di V.

iv) Esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to V$ tale che $\mathrm{Im(L) = U}$? Motivare la risposta! In caso affermativo fornire un esempio.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale a, determinare le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + a x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + (a-1)x_3 = 0 \\ 2x_1 + (a-1)x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ sono assegnati 4 punti:

$$P_1(-1,1,1)\,,\quad P_2(4,1,0)\,,\quad P_3(1,0,0)\,,\quad P_4(-4,0,1)\,.$$

(i) Verificare che tali punti sono complanari e scrivere l'equazione cartesiana del piano π che li contiene.

(ii) Verificare che tali punti sono i vertici consecutivi di un parallelogramma R contenuto in π e calcolare l'area del parallelogramma.

(iii) Scrivere le equazioni dei piani contenenti le facce laterali della piramide di base R e vertice O.

Esercizio 4. Quante sono le isometrie lineari di $\mathbb{E}^3$ che trasformano il vettore $(3,0,4)$ nel vettore $(4,0,3)$ e il vettore $(0,5,0)$ nel vettore $(3,0,-4)$? Di una di queste determinare la matrice che la rappresenta rispetto alla base canonica di $\mathbb{E}^3$.

Esercizio 5. Sia $L : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ l'applicazione lineare definita da $L(x,\, y,\, z) = (2x{-}y{+}2z,\, y{+}2z,\, 2y{-}2z)$. Si consideri il sottospazio vettoriale $W := \{(x, y, z)\ :\ 2y + z = 0\}$.

(i) Determinare una base dell'immagine di L.

(ii) Stabilire se L è diagonalizzabile determinando esplicitamente ogni singolo autospazio.

(iii) Mostrare che $L(W) = W$ e decidere se la restrizione $F := L|_W : W \to W$ di L a W è autoaggiunta rispetto alla restrizione del prodotto scalare standard.

(iv) Mostrare che l'operatore $L^4 := L \circ L \circ L \circ L$ è diagonalizzabile e determinare i corrispondenti autovalori.