COGNOME .... NOME .... MATRICOLA ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO.

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori

$$\{(1,1,0,0),\ (4,6,4,6),\ (0,1,2,3)\}$$

e sia W il sottospazio vettoriale definito da $W := \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{E}^4\ :\ 2x_4 = 3x_3\}$.

i) Trovare un sistema di equazioni lineari il cui insieme delle soluzioni coincide con U,

ii) Determinare una base ortonormale di $U \cap W$ e una base ortonormale di W,

iii) Determinare una base del sottospazio $U^\perp$ ortogonale a U.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale a si consideri il sistema lineare $\begin{cases} ax_1 + ax_2 + ax_3 - ax_4 = a \\ 3x_1 + 3x_2 + ax_3 - ax_4 = 1 \\ x_1 - x_4 = a \end{cases}$

(i) Determinare i valori del parametro a per i quali il sistema è compatibile.

(ii) Risolvere il sistema nei casi $a = 1$ e $a = 0$.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ sia π il piano contenente il punto $A = (0, 0, 6)$ e la retta r di equazioni $x = 3 = y$.

(i) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di π.

(ii) Determinare le coordinate di tutti i punti di r la cui distanza dal punto $B = (6, 0, 0)$ risulta essere $3\sqrt{2}$.

(iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta s per il punto B, parallela a π e ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.

(iv) (facoltativo) Determinare equazioni parametriche del piano σ contenente A, B e ortogonale e π.

Esercizio 4. Si scelga un'isometria lineare NON diretta $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ che ruota i vettori del piano U di equazione $3x + 4z = 0$ di 30 gradi. Si determini la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica di $\mathbb{E}^3$. Quante sono le isometrie non dirette siffatte? E quelle dirette?

Esercizio 5. Sia $L : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ l'operatore lineare che trasforma il vettore $(1, 0, 0)$ in $(4, 4, 4)$ sapendo che l'autospazio rispetto all'autovalore 3 è definito dall'equazione $x - 2y + z = 0$.

(i) Stabilire se L è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare una base diagonalizzante.

(ii) Determinarne la matrice che rappresenta L rispetto alla base canonica.

(iii) Determinarne una base dell'immagine di L e stabilire, motivando la risposta, se esiste un operatore lineare $G : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ tale che la composizione $G \circ L$ sia un isomorfismo. In caso affermativo esibire un esempio di un tale operatore.

(iv) (facoltativo) Stabilire se L è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare canonico.