COGNOME .... NOME .... MATRICOLA ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI A4.

Esercizio 1. Si considerino, nello spazio vettoriale $V := M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ delle matrici di ordine 2×2 a coefficienti reali, i sottoinsiemi W_1 e W_2 definiti dalle seguenti condizioni:

$$W_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M^{2\times 2}(\mathbb{R}) \ : \ a+b+c+d=0 \right\}, \quad W_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M^{2\times 2}(\mathbb{R}) \ : \ a+b+c-d=0 \right\}.$$

i) Dopo aver verificato che W_1 e W_2 sono sottospazi vettoriali di V (spiegando esplicitamente perche'), determinare una base di W_1 e una base di W_2.
ii) Determinare la dimensione e una base dell'intersezione $W_1 \cap W_2$.
iii) Determinare la dimensione e una base della somma $W_1 + W_2$.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale k si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x + k(1-k)y - kz = 3 \\ x + kz = 3 \\ (1-k)y + z = 2 \end{cases}$$

(i) Indicare i valori del parametro h per i quali il sistema ammette una soluzione, nessuna soluzione, almeno due soluzioni distinte.

(ii) Risolvere il sistema per quei valori di h per i quali esistono almeno due soluzioni distinte.

(iii) Fissato un valore come nel punto (ii), siano P, Q due soluzioni distinte di tale sistema. È vero che $3P - 2Q$ è una soluzione del sistema? Ed è vero che $3P - Q$ è una soluzione del sistema? Motivare esaurientemente la risposta.

Esercizio 3. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{E}^4$ definito dalle equazioni $x_1 + x_3 = 0 = x_2 - x_4$ e sia $F : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ la proiezione ortogonale da $\mathbb{E}^4$ su W. Si determini la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica. Si verifichi poi che $\mathrm{Ker}F \oplus \mathrm{Im}F = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 4. In $\mathbb{E}^3$ si considerino i punti $A = (0, 1, 2)$, $B = (1, 2, 3)$ e $C = (2, 1, 2)$. Sia r la retta per i punti A, B e sia s la retta per C, incidente r e ortogonale ad r (tale retta s deve quindi verificare queste tre proprietà contemporaneamente).

(i) Scrivere equazioni cartesiane sia di r che di s.

(ii) Si scrivano le equazioni del fascio improprio di tutti i piani ortogonali ad r.

(iii) Determinare l'area del triangolo $\widehat{ABC}$.

(iv) Determinare la distanza di C dalla retta r.

Esercizio 5. Si consideri la base $\mathcal{B} := \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$ di $\mathbb{E}^4$ e sia $L : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ l'endomorfismo rappresentato in tale base da

$$M_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(i) Determinare la matrice che rappresenta L rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.
(ii) Stabilire se il vettore $(3,3,0,0)$ (coordinate rispetto alla base canonica) appartiene all'immagine dell'endomorfismo L.
(iii) Determinare tutti gli autospazi di L, indicando una base di autovettori di ogni autospazio espressa in coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.
(iv) Stabilire se l'operatore L è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare canonico, motivando la risposta.