Geometria II per ingegneri meccanici, a.a. 2012-2013

FOGLIO DI ESERCIZI 1

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, <,>_{st})$ si denoti con $\times_{st}$ il prodotto vettoriale standard.

(a) Si determini l'area del triangolo di vertici $(0,0,1),(2,1,1),(3,3,3)$.
(b) Si determini la distanza della retta di equazioni $x = y,\ y = z$ dal punto di coordinate $(3,4,5)$.
(c) Dati v e w linearmente dipendenti, la base $\{v,\ w,\ v \times_{st} w\}$ è concordemente orientata con la base $\{(1,0,1),\ (1,0,-1),\ (0,-4,0)\}$? Motivare la risposta.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione

$$\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

definita da

$$\rho(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_3 + 2x_2y_2 + 2x_3y_1 + 5x_3y_3 \,.$$

(a) Si mostri che ρ definisce un prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^2$.
(b) Si ortonormalizzi la base canonica rispetto a ρ.
(c) Calcolare il prodotto vettoriale (rispetto a ρ e ad un orientazione fissata) di e_1 con e_2.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{E}^2$. Si determinino le equazioni della rotazione antioraria di angolo $\pi/3$ intorno al punto di coordinate $(2,4)$.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{E}^3$. Si determinino un paio di isometrie dirette e un paio di isometrie inverse che trasformano il piano di equazione $x+y+z = 3$ nel piano per il punto $(5,5,5)$ e giacitura generata dai vettori $(0,24,282)$ e $(0,0,672\pi)$.

Esercizio 5. Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{E}^4$.

(a) Si determinino le equazioni della riflessione ortogonale rispetto al piano di equazioni $x = y$, $z = t$.
(b) Si mostri che se f e' una riflessione ortogonale allora $f^2 := f \circ f = Id$.
(c) Si mostri che ogni applicazione lineare tale che $f^2 = Id$ è diagonalizzabile.
(d) Si esibisca un'esempio di un'applicazione lineare $f : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ che non sia una isometria e tale che $f^2 = Id$.

Esercizio 6. In $\mathbb{R}^2$ munito del prodotto scalare canonico si consideri la base $B = \{\,(1,1),(3,1)\}$ e l'unica applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$M_B(F) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Mostrare che F è autoaggiunto.
(b) Determinare gli autovalori di F e una base ortonormale di autovettori (quante sono le basi di questo tipo ?).
(c) Determinare $M_E(F)$, dove E è la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e commentate il risultato.