ARC 18/19, Iannuzzi-Rădulescu Nome:

Analisi Reale e Complessa

III appello, 11 giugno 2019

Non è consentito l'uso di libri o fotocopie, ad eccezione del materiale scritto a mano con le formule. Non è consentito l'uso di strumenti di comunicazione. Durante l'esame NON è consentito lasciare l'aula o fare domande. Un esercizio, senza la giustificazione dei passaggi eseguiti, NON sarà presso in considerazione. Le risposte non motivate, senza calcoli o incomprensibili non saranno prese in considerazione. Consegnare solo questi fogli.

---

1. (6 pt) Sia $E \subseteq R$ un sottoinsieme misurabile di misura finita e sia $f : E \to R \cup \{\pm\infty\}$ una funzione misurabile. Dimostrare che f é quasi ovunque finita in E se e solo se f é quasi limitata in E, nel senso che per ogni $\epsilon > 0$ esistono un chiuso $K \subseteq E$ ed una costante $c > 0$ tali che

$$|f| < c \text{ in } K \text{ e } |E \backslash K| < \epsilon.$$

Rimane questo vero se E non e di misura finita?

2. (6 pt) Sia A un sottoinsieme di R^d e $\alpha \in R$. Si dimostri che

$$|\alpha A|_e = |\alpha||A|_e.$$

3. (6 pt) Per ciascuna delle seguenti funzioni meromorfe su $\mathbb{C}$, trovare tutti i poli e intorno a ciascun polo trovare lo sviluppo di Laurent:

$$\frac{z^3}{z+2}\,, \qquad \frac{\sin z}{z+\pi}\,, \qquad \frac{(z-2)^2}{z(z-1)}\,.$$

4. (6 pt) Sia z_0 in un aperto A di $\mathbb{C}$ e sia $f : A \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa
A. Mostrare che se z_0 è una singolarita polare di f allora la funzione olomorfa $z \to e^{f(z)}$ ha una singolarità essenziale in z_0.
B. Mostrare che se z_0 è una singolarita essenziale di f allora la funzione olomorfa $z \to e^{f(z)}$ ha una singolarità essenziale in z_0.

5. (6 pt) Calcolare i seguenti integrali

$$\int_\gamma \frac{ze^{-iz}}{(z-i)^3}dz, \qquad \int_\gamma \frac{z}{(e^z-1)\sin z}dz$$

dove $\gamma(\theta) = \pi/2 + \pi e^{i\theta}$, per $\theta \in [0, 2\pi]$.