ESERCIZI DI ALGEBRA 2, FOGLIO 8: gruppi di Galois.

Dicembre 2016, Strickland-Iannuzzi

(1) Si mostri che $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ è un'estensione normale di $\mathbb{Q}$. Se ne determini il gruppo di Galois, indicandone esplicitamente dei generatori.

(2) Sia K un'estensione normale di grado 6 di un campo F. Mostrare che esiste un'unica estensione normale di F di grado 2 contenuta in K.

(3) Determinare il gruppo di Galois dei seguenti polinomi di $\mathbb{Q}[x]$:

$$x^2 - 101\,, \qquad x^3 - 1\,, \qquad x^3 - 3\,, \qquad x^4 - 1\,, \qquad x^n - 1\,.$$

(4) Determinare il gruppo di Galois del polinomio $x^4 - 2$ in:

$$\mathbb{R}[x]\,, \qquad \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]\,, \qquad \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})[x] \qquad \mathbb{Q}[x]\;.$$

(5) Sia $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Mostrare che $\mathbb{Q}(\alpha)$ è un estensione normale di $\mathbb{Q}$ e determinarne il gruppo di Galois.

(6) Determinare il gruppo di Galois dei seguenti polinomi di $\mathbb{Q}[x]$:

$$x^3 - 5x^2 + 6\,, \qquad x^3 - 5x - 5\,, \qquad x^3 - 3x + 1\,,$$

(suggerimento: se α è radice di $x^3 - 3x + 1$, un'altra radice risulta essere $\alpha^2 - 2$).

(7) Determinare il gruppo di Galois dei seguenti polinomi di $\mathbb{Q}[x]$:

$$x^4 - 10x^2 + 5\,, \qquad 2x^4 - x^3 - 4x + 2\,, \qquad x^4 - 2\,.$$

(8) Determinare il gruppo di Galois dei seguenti polinomi di $\mathbb{Q}[x]$:

$$x^6 - 6x^3 + 8\,, \qquad x^6 + x^4 - 4x^2 - 4\,.$$