ESERCIZI DI ALGEBRA 2, FOGLIO 7: Campi di spezzamento.

Dicembre 2016, Strickland-Iannuzzi

(1) Sia K il campo di spezzamento di un polinomio in $L[x]$ di grado n. Si mostri che $[K : L]$ divide $n!$.

(2) Determinare il campo di spezzamento, indicandone il grado su $\mathbb{Q}$, dei seguenti polinomi di $\mathbb{Q}[x]$:

$$x^2 - 101\,, \qquad x^3 - 1\,, \qquad x^3 - 3\,, \qquad x^4 - 1\,, \qquad x^{10} - 1\,.$$

(3) Determinare il grado del campo di spezzamento del polinomio $x^4 - 2$ sui campi:

$$\mathbb{C}\,, \qquad \mathbb{R}\,, \qquad \mathbb{Q}\,, \qquad \mathbb{Q}(\sqrt{2})\,, \qquad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})\,, \qquad \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})\,, \qquad \mathbb{Z}_2\,, \qquad \mathbb{Z}_3\,.$$

(4) Determinare il grado del campo di spezzamento dei seguenti polinomi di $\mathbb{Q}[x]$:

$$x^4 - 2x^2 + 9\,, \qquad x^4 - 4x^2 - 9\,, \qquad x^3 - 5x - 5\,, \qquad x^3 - 3x + 1\,,$$

(suggerimento: se α è radice di $x^3 - 3x + 1$, un'altra radice risulta essere $\alpha^2 - 2$).

(5) Determinare il campo di spezzamento, indicandone il grado, dei polinomi

(i) $3x^4 - 2x^3 - 3x + 2 \quad \text{in} \quad \mathbb{Q}[x]\,,$

(ii) $x^4 - 10x^2 + 5 \quad \text{in} \quad \mathbb{Q}[x]\,,$

(iii) $(x^3 - 2)(x^2 + 2) \quad \text{in} \quad \mathbb{Q}[x]\,,$

(iv) $x^3 + \sqrt{3}x^2 - 2x - 2\sqrt{3} \quad \text{in} \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3})[x]\,.$

(6) (i) Stabilire se $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ è un'estensione normale di $\mathbb{Q}$.

(ii) Sia $L = \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$. Stabilire se $L(\sqrt[6]{2})$ è un'estensione normale di L.

(7) Mostrare che non è possibile costruire con riga e compasso un angolo di ampiezza un grado.

(8) Determinare il campo di spezzamento, indicandone il grado, dei seguenti polinomi:

(i) $x^2 + x + 1$ in $\mathbb{Z}_5[x]\,,$

(ii) $x^3 + x^2 + x + 2$ in $\mathbb{Z}_3[x]\,.$

Data una radice α nel campo di spezzamento del polinomio in (i), si determini l'inverso di $3 + \alpha$.