ESERCIZI DI ALGEBRA 2, FOGLIO 6: campi ed estensioni.

Novembre 2016, Strickland-Iannuzzi

(1) Si mostri che il grado delle seguenti estensioni di $\mathbb{Q}$ è finito e se ne indichi una base.

$$\mathbb{Q}(\sqrt{6}),\quad \mathbb{Q}(\sqrt{6})\cap\mathbb{Q}(\sqrt{2}),\quad \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}),\quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}),\quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}),$$
$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt{2}),\quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}),\quad \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2-\sqrt{2}})\,.$$

(2) Calcolare il grado delle seguenti estensioni di $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q}(\pi^2+\pi+1),\quad \mathbb{Q}(\sqrt{2},i),\quad \mathbb{Q}(e^{i\frac{\pi}{4}}),\quad \mathbb{Q}(e^{i\frac{2\pi}{p}})\text{ con } p \text{ primo.}$$

Determinare una base di $\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)\cap\mathbb{Q}(e^{i\frac{\pi}{4}})$ su $\mathbb{Q}$.

(3) Calcolare il grado di $\mathbb{Q}(e^{i\frac{2\pi}{n}})$, con n numero intero.

(4) (i) Esibire elementi α, β in $\mathbb{C}$ trascendenti tali che lo loro somma sia algebrica,
(ii) Esibire elementi α, β in $\mathbb{C}$ trascendenti tali che il loro prodotto sia algebrico.
(iii) Mostrare che non esistono elementi α, β in $\mathbb{C}$ trascendenti tali che sia la loro somma che il loro prodotto siano algebrici.

(5) Mostrare che $\mathbb{Q}(e)$ e $\mathbb{Q}(\pi)$ sono isomorfi.

(6) Mostrare che $\mathbb{Q}(i)$ e $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ non sono isomorfi.

(7) Si provi che $\sqrt{2}+i$ è algebrico di grado 4 su $\mathbb{Q}$ e di grado 2 su $\mathbb{R}$.

(8) Sia α una radice del polinomio $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$ definito da

$$f(x)=x^3-5x-5\,.$$

Assicurarsi che l'elemento $1-\alpha$ è invertibile in $\mathbb{Q}(\alpha)$ e determinarne l'inverso.

(9) Si provi che l'ordine di un campo finito è una potenza di un numero primo.

(10) Sia L un'estensione di grado dispari di un campo K e $\alpha\in L$.
(i) Mostrare che $K(\alpha)=K(\alpha^2)$.
(ii) Mostrare che se $\alpha^2\in K$ allora $\alpha\in K$.
(iii) Mostrare che $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ non appartengono a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.