ESERCIZI DI ALGEBRA 2, FOGLIO 5: Sottogruppi di Sylow.

Novembre 2016, Strickland-Iannuzzi

(1) Sia G un gruppo di ordine 33. Dimostrare che G è isomorfo a $\mathbb{Z}_{33}$ (cf. esercizio 4.5).

(2) Dimostrare che il centro di un gruppo di ordine una potenza di p, con p primo, non è banale. Dedurne che un gruppo di ordine p^2 è abeliano. Mostrare che il centro di un gruppo non abeliano di ordine p^3 ha ordine p.

(3) Sia G un gruppo di ordine 45.

(i) Dimostrare che i sottogruppi di Sylow di G sono normali.

(ii) Dimostrare che G è abeliano.

(4) Sia G un gruppo di ordine 12.

(i) Dimostrare che almeno uno dei sottogruppi di Sylow è normale.

(ii) Esibire esempi dove i 2-Sylow, rispettivamente i 3-Sylow, non sono normali.

(5) Sia G un gruppo di ordine 56. Dimostrare che almeno uno dei sottogruppi di Sylow è normale.

(6) Determinare i sottoguppi di Sylow si A_5.

(7) Sia $G = SL_2(\mathbb{Z}_3)$. Quanti elementi ha G? Decidere se il 2-sottogruppo di Sylow di G è isomorfo al gruppo diedrale D_4 o al gruppo delle unità dei quaternioni $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$.

(8) Un gruppo si dice *semplice* se gli unici sottogruppi normali sono G e $\{e\}$. Dimostrare che un gruppo di cardinalità pq, con p e q numeri primi, non è semplice.

(9) Sia H un sottogruppo di indice n in G. Mostrare che H contiene un sottogruppo N, normale in G, il cui indice in G divide $n!$

(10) Dimostrare che nessun gruppo di ordine n è semplice nei seguenti casi:

$$n = 200, \qquad n = 4p \text{ con } p \geq 5 \text{ primo}, \qquad n = 36, \qquad n = 72\,.$$

(ricordarsi dell'esercizio precedente).

(11) Sia G un gruppo abeliano di ordine n. Mostrare che per ogni divisore m di n esiste un sottogruppo di ordine m