ESERCIZI DI ALGEBRA 2, FOGLIO 4: omomorfismi e azioni di gruppi

Novembre 2016, Strickland-Iannuzzi

(1) Determinare tutti i possibili omomorfismi da S_3 a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(2) Sia $G = Int(Q)$ il gruppo degli automorfismi interni del gruppo delle unità dei quaternioni $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$. Stabilire se esiste un monomorfismo (omomorfismo iniettivo) da G in $\mathbb{Z}_8$ e, in caso affermativo, indicarne uno.

(3) Siano H e N sottogruppi di un gruppo G. Supponiamo che H normalizzi N.

(i) Dimostrare che $HN := \{hn \ : \ h \in H, n \in N\}$ è un sottogruppo di G e che N è normale in HN.

(ii) Dimostrare che l'inclusione $H \subset N$ induce un isomorfismo di gruppi
$$H/(H \cap N) \cong HN/N\,.$$

(4) Siano N_1 ed N_2 sottogruppi normali di un gruppo G tali che $N_1 \cap N_2 = \{e\}$.

(i) Dimostrare che N_1 ed N_2 commutano.

(ii) Dimostrare che $N_1N_2 \cong N_1 \times N_2$.

(5) Determinare il numero di tutti i possibili anagrammi della parola ASSOLATA.

(6) Determinare tutti i sottogruppi normali del gruppo diedrale D_4.

(7) Mostrare che due elementi coniugati in un gruppo G hanno lo stesso ordine e che, in generale, non vale il viceversa.

(8) Scrivere l'equazione delle classi del gruppo simmetrico S_3 e del gruppo diedrale D_4, indicando gli stabilizzatori delle singole orbite rispetto all'azione di coniugio.

(9) Sia A_n il sottogruppo alterno di S_n.

(i) Mostrare che A_n è unione di classi di coniugio di S_n.

(ii) Mostrare che ogni classe di coniugio di A_n è contenuta in una classe di coniugio di S_n.

(iii) Mostrare che se α e β sono elementi di A_n coniugati in S_n, le loro classi di coniugio in A_n hanno lo stesso numero di elementi.

(iv) Determinare tutte le classi di coniugio di A_4 e di A_5.

(10) (i) Si vogliono colorare di rosso 2 dei 5 denti di una ruota dentata bianca. In quante maniere distinguibili è possibile farlo? (si osservi che la ruota la si può guardare sia da un lato che dall'altro).

(ii) Si vogliono colorare di rosso 3 dei 7 denti di una ruota dentata bianca. In quante maniere distinguibili è possibile farlo?

(iii) Si vogliono colorare di rosso 3 degli 8 denti di una ruota dentata bianca. In quante maniere distinguibili è possibile farlo?

(11) Per $n \geq 2$ si consideri il gruppo S_n delle permutazioni di un insieme di n elementi X Sia H un sottogruppo di S_n che agisce transitivamente su X.

(i) Dimostrare che n divide la cardinalità di H.

(ii) Usare la formula di Burnside per mostrare che H contiene un elemento senza punti fissi in X.