ESERCIZI DI ALGEBRA 2, FOGLIO 3: ideali e anelli quozienti.

Ottobre 2016, Strickland-Iannuzzi

(1) (i) In $\mathbb{Q}[x]$ determinare un generatore dell'ideale

$$\Big(x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 6x + 12, (x^4 - 3x^2)(x + 1)\Big).$$

(ii) In $\mathbb{Z}[i]$ determinare dei generatori degli ideali

$$\big(1 - 3i,\, 10\big) \qquad \big(1 - 3i,\, 2 + 6i\big).$$

(2) (i) Ridimostrare che ogni dominio finito è un campo.

(ii) Dedurne che gli ideali primi non nulli di $\mathbb{Z}[i]$ sono massimali (segue anche dal fatto che . . .).

(iii) Studiare $\mathbb{Z}[i]/(2)$.

(iv) Mostrare che l'ideale (5) non è primo in $\mathbb{Z}[i]$. Più in generale, mostrare che un elemento della forma $a + 0i$ è irriducibile se e solo se a è primo in $\mathbb{Z}$ e non è somma di quadrati di numeri interi.

(3) Sia p un primo e I_p l'ideale di $\mathbb{Z}[x]$ generato da p e da x^2+1. Per $p = 2, 3$ e 5 decidere se I_p è primo, massimale o nessuno dei due.

(4) (Pag. 185 del libro) Mostrare che 2 è irriducibile in $R = \mathbb{Z}[x]/(x^2 + 3)$ e non è primo. Cosa se ne può dedurre riguardo all'anello R?

(5) Stabilire se i seguenti anelli sono isomorfi e in caso affermativo esibire un isomorfismo esplicito.

$$\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \qquad \mathbb{R}[x]/(x^2 - 1) \qquad \mathbb{R}[x]/(x^2 + 3) \qquad \mathbb{C}$$

(6) (i) Mostrare che l'applicazione $F : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_2$, definita da $f(x) \to [f(0)]_2$, è un omomorfismo suriettivo di anelli.

(ii) Mostrare che $Ker(F) = (2, x)$ e dedurne che $(2, x)$ è massimale.

(iii) Mostrare che $(2, x)$ non è principale.

(7) Stabilire se i seguenti anelli sono isomorfi.

$$\mathbb{Z}[x]/(4, x) \quad \mathbb{Z}[x]/(2, x^2 + x + 1) \quad \mathbb{R}[x]/(x^2 + 6x + 13) \quad \mathbb{C}[x]/(x^7 - 4x^5 - x + 1)$$

(8) Sia $R := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ è } \text{continua}\}$.

(i) Mostrare che R, munito della somma e del prodotto ereditati da $\mathbb{R}$, e' un anello.

(ii) Fissato x in $[0,1]$, mostrare che $M_x = \{f \in R \ : \ f(x) = 0\}$ è un ideale massimale di R.

(iii) Ricordando che l'intervallo $[0,1]$ è compatto, mostrare che ogni ideale massimale di R coincide con M_x, per un certo $x \in [0,1]$.