ESERCIZI DI ALGEBRA 2, FOGLIO 2: anelli, omomorfismi.

Ottobre 2016, Strickland-Iannuzzi

(1) Siano R_1 e R_2 due anelli commutativi unitari. Si mostri che tutti gli ideali dell'anello prodotto $R_1 \times R_2$ sono della forma $I_1 \times I_2$, con I_1 e I_2 ideali di R_1 ed R_2, rispettivamente. Quali tra questi sono massimali? (svolto in classe)

(2) Determinare tutti gli ideali massimali di $\mathbb{Z}_{30}$.

(3) Sia $f : A \to B$ un omomorfismo di anelli. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(i) Se I è un ideale di A, anche $f(I)$ lo è.

(ii) Se J è un ideale di B, anche $f^{-1}(J)$ lo è.

(4) In $\mathbb{R}[x]$ si considerino i sottoinsiemi

$$I_1 := \{f(x) \ : \ f(1) = 0\},$$
$$I_2 := \{f(x) \ : \ f(1) = 0, \ f(2) = 0\},$$
$$I_3 := \{f(x) \ : \ f(1) = 0, \ f'(1) = 0\}.$$

(i) Mostrare che si tratta di ideali e indicarne dei generatori.

(ii) Mostrare che $\mathbb{R}[x]/I_1$ non è isomorfo a $\mathbb{R}[x]/I_2$.

(iii) Mostrare che $\mathbb{R}[x]/I_3$ ammette elementi nilpotenti non nulli

(un elemento r di un anello R detto nilpotente se esiste un intero n tale che $r^n = 0$).

(5) (i) Determinare tutti gli elementi nilpoenti dell'anello $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$.

(ii) Stabilire se $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{18}$.

(iii) Indicare un ideale I di $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{18}$ tale che $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{18}/I$ sia un campo di 3 elementi

(6) (Esercizio 4.4.1 del libro di testo) Siano r, s due interi coprimi. Si mostri che l'applicazione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$, definita da $n \to ([n]_r, [n]_s)$, è un epimorfismo. Se ne deduca che $\mathbb{Z}_{rs}$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$.

(7) (Teorema cinese del resto) Siano r, s due interi coprimi. Risolvere gli esercizi 4.3.3, e 4.4.4 del libro di testo e dedurne che $\mathbb{Z}_{rs}$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s$.

(8) Ridiscutere nuovamente l'esercizio (2) alla luce di tale isomorfismo e dell'esercizio (1).

(9) Sia R un dominio unitario.

(i) Mostrare che esiste un unico omomorfismo non banale $f : \mathbb{Z} \to R$.

(ii) Mostrare che se $R = \mathbb{Z}$ tale omomorfismo è l'identità.

(iii) Sia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ un omomorfismo non banale. Mostrare che f è l'identità.

(iv) Sia f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un omomorfismo non banale di anelli. Dimostrare che $f(x) > 0$ se $x > 0$ e che per ogni x, $y \in \mathbb{R}$ si ha che $f(x) > f(y)$ se $x > y$ (sugg.: i numeri positivi ammettono radice in $\mathbb{R}$).

(v) Sia f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un omomorfismo non banale di anelli. Mostrare che f è l'identità.

(vi) Vale l'analogo risultato per un omomorfismo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$?