

ESERCIZI DI ALGEBRA 2, FOGLIO 1

Settembre 2016, Strickland-Iannuzzi

- (1) Nel campo dei numeri razionali \mathbb{Q} si consideri il sottoinsieme

$$A = \left\{ \frac{z}{5^n} : z \in \mathbb{Z} \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- (i) Provare che A è un sottoanello di \mathbb{Q} ,
 - (ii) Stabilire se A è anche un sottocampo di \mathbb{Q} ,
 - (iii) Stabilire se A ammette ideali propri non banali.
 - (iv) Esiste un omomorfismo iniettivo da A in $\mathbb{Z}_8[x]$?
- (2) Nell'anello prodotto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4$ determinare gli elementi invertibili e gli ideali massimali.
- (3) Siano R_1 ed R_2 anelli. Dimostrare che $(R_1 \times R_2)^* = R_1^* \times R_2^*$.
- (4) Sia $f : A \rightarrow B$ un epimorfismo di anelli. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false.
- (i) Se A è un dominio, anche B lo è.
 - (ii) Se B è un dominio, anche A lo è.
- (5) Sia A un dominio. Mostrare che anche $A[x]$ lo è. Stabilire se $\mathbb{R}[x, y]$ è un dominio.
- (6) Stabilire se l'applicazione $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, definita da $f(x, y) = (3x - 3y, 0)$, è un morfismo di anelli.
- (7) Stabilire se esistono degli isomorfismi tra i seguenti anelli: $\mathbb{Z}_5[x]$, $\mathbb{Z}_6[x]$, $\mathbb{Z}_7[x]$, $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ e $\mathbb{R}[x]$. Qual'è la loro cardinalità? Quali di questi sono domini, quali sono campi?