Il teorema di Abel

20 Novembre 2005

Note integrative del corso di Analisi Matematica 3 tenuto da Daniele Guido presso l'Università di Roma "Tor Vergata" nell'anno accademico 2006/07.

Lemma 1. Siano β_p e γ_p due successioni, e sia $b_p = \sum_{j=1}^{p} \beta_j$, $c_p = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j$. Allora

$$\sum_{k=1}^{p} b_k \gamma_k = b_p c_p - \sum_{k=1}^{p} \beta_k c_{k-1}.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} b_k c_k - b_{k-1} c_{k-1} &= b_k c_k - b_k c_{k-1} + b_k c_{k-1} - b_{k-1} c_{k-1} \\ &= b_k (c_k - c_{k-1}) + (b_k - b_{k-1}) c_{k-1} = b_k \gamma_k + c_{k-1} \beta_k. \end{aligned}$$

Poiché la somma $\sum_{k=1}^{p} (b_k c_k - b_{k-1} c_{k-1})$ è telescopica e $b_0 = c_0 = 0$ per definizione, si ha

$$b_p c_p = \sum_{k=1}^{p} b_k \gamma_k + \sum_{k=1}^{p} \beta_k c_{k-1},$$

da cui segue la tesi. □

Teorema 2 (Teorema di Abel). Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $\rho \in (0, +\infty)$. Se la serie converge per y con $|y| = \rho$, allora converge uniformemente in tutto l'intervallo chiuso di estremi 0 e y.

Dimostrazione. Faremo la dimostrazione per il caso $y = \rho$, l'altro caso si dimostra in modo analogo. Poiché la serie converge in y, le somme parziali $S_n(y) = \sum_{j=1}^{n} a_j y^j$ sono una successione di Cauchy, ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0, \ p > 0 \Rightarrow |S_{n+p}(y) - S_n(y)| = |\sum_{j=n+1}^{n+p} a_j y^j| < \varepsilon. \quad (1)$$

Faremo vedere che la successione $S_n(x)$ è di Cauchy uniformemente in $x \in [0, y]$, da cui la segue immediatamente la tesi.

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \sum_{j=n+1}^{n+p} a_j x^j = \sum_{j=n+1}^{n+p} a_j y^j \left(\frac{x}{y}\right)^j = \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} y^{n+k} \left(\frac{x}{y}\right)^{n+k}$$

ove si è posto $k = j - n$. Vogliamo usare il Lemma precedente, con $b_k = \left(\frac{x}{y}\right)^{n+k}$ e $\gamma_k = a_{n+k}y^{n+k}$. Si osservi che allora

$$\beta_k = b_k - b_{k-1} = \left(\frac{x}{y}\right)^{n+k} - \left(\frac{x}{y}\right)^{n+k-1},$$

mentre

$$c_k = \sum_{m=1}^{k} \gamma_m = \sum_{m=1}^{k} a_{n+m} y^{n+m} = S_{n+k}(y) - S_n(y).$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} |S_{n+p}(x) - S_n(x)| \le{}& \left(\frac{x}{y}\right)^{n+p} |S_{n+p}(y) - S_n(y)| \\ &+ \sum_{k=1}^{p} |S_{n+k-1}(y) - S_n(y)| \left| \left(\frac{x}{y}\right)^{n+k} - \left(\frac{x}{y}\right)^{n+k-1} \right|. \end{aligned}$$

Scegliendo n e p come in (1), si ottiene

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \le \varepsilon \left(1 + \sum_{k=1}^{p} \left| \left(\frac{x}{y}\right)^{n+k} - \left(\frac{x}{y}\right)^{n+k-1} \right| \right),$$

ove si è maggiorato x/y con 1 nel primo addendo. Poiché

$$\left| \left(\frac{x}{y}\right)^{n+k} - \left(\frac{x}{y}\right)^{n+k-1} \right| = \left(\frac{x}{y}\right)^{n+k-1} - \left(\frac{x}{y}\right)^{n+k}$$

la somma diviene una somma telescopica, che vale $\left(\frac{x}{y}\right)^{n} - \left(\frac{x}{y}\right)^{n+p} \le 2$, da cui $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \le 3\varepsilon$ uniformemente in x □

Osservazione 3.

Si osservi che nell'enuciato del teorema di Abel l'ipotesi $|y| = \rho$ non è necessaria. D'altr'onde, se $|y| < \rho$, vale la convergenza totale.

Nel caso $|y| = \rho$ la convergenza assoluta è in generale il meglio che si possa ottenere, infatti la serie $\sum_1^\infty n^{-1}x^n$ non converge totalmente in $[-1, 0]$.