NOTE INTEGRATIVE PER IL CORSO DI ANALISI MATEMATICA 1 ANNO ACCADEMICO 2016/17.

D. GUIDO, G. MORSELLA

1. Equivalenza tra diverse forme dell'assioma di continuità per $\mathbb{R}$

Elenchiamo qui di seguito tre diversi assiomi che si possono aggiungere agli assiomi di campo ordinato per definire il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Dimostreremo che la validità di uno qualunque di questi tre assiomi, assieme a quelli di campo ordinato, implica gli altri due come teoremi.

Il primo assioma che consideriamo è il seguente.

Assioma dell'estremo superiore. Per ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente esiste $x \in \mathbb{R}$ maggiorante per A (cioè tale che $y \leq x$ per ogni $y \in A$) e tale che per ogni $x' \in \mathbb{R}$ maggiorante per A si abbia $x \leq x'$.

Un tale elemento $x \in \mathbb{R}$ viene detto l'*estremo superiore* di A, e si indica con il simbolo $\sup A$. Quindi l'assioma si può esprimere brevemente dicendo che ogni $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ammette estremo superiore. Simmetricamente, dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente, il suo *estremo inferiore* (in simboli $\inf A$) sarà un $x \in \mathbb{R}$ che sia un minorante di A e che maggiori ogni altro minorante di A. Se allora vale l'assioma dell'estremo superiore, ogni tale A ammette estremo inferiore, infatti l'insieme $-A := \{-x : x \in A\}$ è chiaramente non vuoto e limitato superiormente, e dunque $-\sup(-A) = \inf A$, come subito si verifica.

Prima di enunciare il secondo assioma, conviene introdurre la definizione seguente.

Definizione 1.1. Una *sezione di Dedekind* di $\mathbb{R}$ è una coppia (A, B) di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ la cui unione sia tutto $\mathbb{R}$ e tali che per ogni $x \in A$, $y \in B$ risulti $x < y$.

Dalla condizione $x < y$ per ogni $x \in A$, $y \in B$, segue chiaramente che $A \cap B = \emptyset$. Inoltre sempre da questo segue che se $x \in A$ e $x' \leq x$ allora deve essere $x' \in A$ (poiché altrimenti si avrebbe $x' > x$). Analogamente $y \in B$ e $y' \geq y$ implica $y' \in B$.

Assioma di Dedekind. Per ogni sezione di Dedekind (A, B) di $\mathbb{R}$ esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq x_0 \leq y$ per ogni $x \in A$, $y \in B$.

Il numero $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto *elemento di separazione* della sezione (A, B).

Nella formulazione dell'ultimo assioma useremo la notazione $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Assioma degli intervalli inscatolati. Dati numeri reali a_k, b_k, $k \in \mathbb{N}_0$, tali che

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \cdots \leq b_{k+1} \leq b_k \leq \dots b_1 \leq b_0,$$

e per i quali $b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, esiste un unico $x_0 \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} [a_k, b_k]$.

Teorema 1.2. L'assioma dell'estremo superiore implica l'assioma degli intervalli inscatolati.

Proof. Siano $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, come nell'assioma degli intervalli inscatolati e poniamo $A := \{a_k : k \in \mathbb{N}_0\}$. A è chiaramente non vuoto, e ammette un qualunque b_k come maggiorante, dunque per l'assioma dell'estremo superiore esiste $x_0 := \sup A \leq b_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Inoltre essendo x_0 esso stesso maggiorante di A si ha $x_0 \geq a_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, e quindi $x_0 \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} [a_k, b_k]$. Per dimostrare l'unicità di x_0 ragioniamo per assurdo e supponiamo che esista $x_1 \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} [a_k, b_k]$ diverso da x_0. Poiché allora $x_1 \geq a_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}_0$, si deve avere $x_1 > x_0$. Inoltre, dal fatto che $x_0, x_1 \in [a_k, b_k]$, $k \in \mathbb{N}_0$, segue che $x_1 - x_0 \leq b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$ e dunque

$$k \leq 2^k \leq \frac{b_0 - a_0}{x_1 - x_0} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

dove la prima disuguaglianza si ottiene facilmente per induzione. Ma questo contraddice l'illimitatezza superiore di $\mathbb{N}$ (cf. esercizio 4 del 26 settembre). □

Teorema 1.3. L'assioma degli intervalli inscatolati implica l'assioma di Dedekind.

Proof. Sia (A, B) una sezione di Dedekind di $\mathbb{R}$. Dimostriamo per induzione che è possibile definire una famiglia di intervalli inscatolati $[a_k, b_k]$, $k \in \mathbb{N}_0$, con la proprietà che $a_k \in A$, $b_k \in B$ per ogni $k \in \mathbb{N}_0$. Poiché infatti A e B sono non vuoti, è possibile scegliere numeri $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. Dato poi un intervallo $[a_k, b_k]$ con $b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$ e $a_k \in A$, $b_k \in B$, sia $c_k := \frac{a_k + b_k}{2}$. Se risulta $c_k \in A$, si porrà $a_{k+1} := c_k \in A$ e $b_{k+1} := b_k \in B$, e si avrà

$$b_{k+1} - a_{k+1} = b_k - \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}};$$

se invece $c_k \in B$ si porrà $a_{k+1} := a_k \in A$ e $b_{k+1} := c_k \in B$, e di nuovo $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$, e il passo induttivo è completo. In sostanza, ad ogni passo si sceglie la metà dell'intervallo definito al passo precedente che ha i due estremi in A e B rispettivamente. Ottenuta così una famiglia di intervalli inscatolati, esisterà un unico $x_0 \in \bigcap_{k=0}^{+\infty}[a_k, b_k]$. Mostriamo che tale x_0 è l'elemento di separazione della sezione (A, B). Sia infatti $x \in A$; se risultasse $x > x_0$ tale x non apparterebbe a $\bigcap_{k=0}^{+\infty}[a_k, b_k]$, e dunque dovrebbe esistere un $k \in \mathbb{N}_0$ tale che $x \notin [a_k, b_k]$, da cui $x > b_k \in B$ (in quanto $x > x_0 \geq a_k$). Ma allora dall'osservazione successiva alla definizione di sezione di Dedekind si avrebbe $x \in B$, il che è assurdo, e dunque $x \leq x_0$. Analogamente si dimostra che se $y \in B$ allora $y \geq x_0$. □

Teorema 1.4. L'assioma di Dedekind implica l'assioma dell'estremo superiore.

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato di $\mathbb{R}$. Se A ha un massimo non c'è niente da dimostrare perché il sup coinciderebbe col massimo. Assumiamo quindi che A non abbia massimo, e denotiamo con $M(A)$ l'insieme dei maggioranti di A. Facciamo vedere che $(M(A)^c, M(A))$ è una sezione di Dedekind. Si ha $A \subset M(A)^c$, infatti se un elemento di A fosse anche un maggiorante per A sarebbe il massimo di A, contro l'ipotesi. E dunque essendo A non vuoto, anche $M(A)^c$ lo è. Poiché A è superiormente limitato anche $M(A)$ è non vuoto. Chiaramente $M(A) \cup M(A)^c = \mathbb{R}$. Sia ora $c \in M(A)^c$; allora c non è un maggiorante di A, ovvero $\exists a \in A : a > c$. Quindi, per ogni $b \in M(A)$, $b \geq a > c$, ovvero le due classi sono separate. Sia dunque x un elemento di separazione. Allora x è un maggiorante di $M(A)^c$, e quindi anche un maggiorante di A, poiché $A \subset M(A)^c$. Ma $x \leq b$ per ogni $b \in M(A)$, cioè è il minimo dei maggioranti. □

Osservazione 1.5. L'elemento separatore di una sezione di Dedekind è unico. Se ne troviamo due e sono entrambi in A, detti a_1, a_2, si avrebbe che poiché a_1 sta in A e a_2 è separatore $a_1 \leq a_2$. Allo stesso modo si avrebbe $a_2 \leq a_1$, ovvero $a_1 = a_2$ per la proprietà antisimmetrica della relazione d'ordine. Con un ragionamento analogo si dimostra che se fossero entrambi in B coinciderebbero. Infine non possono esistere due separatori $a \in A, b \in B$, perché il punto medio $\frac{a+b}{2}$ dovrebbe essere in A o in B. Ma non può essere in A, altrimenti $a \geq \frac{a+b}{2}$ cioè $a \geq b$, che è impossibile. Egualmente impossibile è supporre che il punto medio sia in B.

1.1. **Sulla proprietà di Archimede dei numeri reali.** Per l'insieme dei numeri reali vale la proprietà di Archimede, che può enunciarsi nei due modi equivalenti che seguono:

(1) Se $0 < a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, esiste $n \in \mathbb{N}$ per cui $na > b$.
(2) Se $a \geq 0$ e $a \leq \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $a = 0$.

Dimostriamo la prima: se così non fosse, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si avrebbe $na \leq b$, cioè $n \leq \frac{b}{a}$, contro l'ipotesi si illimitatezza superiore di $\mathbb{N}$.
Dimostriamo la seconda: se cosiì non fosse, si avrebbe $a > 0$ e $n \leq \frac{1}{a}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, di nuovo contro l'ipotesi si illimitatezza superiore di $\mathbb{N}$.

2. I numeri naturali come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

2.1. **Insiemi induttivi.** Diremo che $A \subseteq \mathbb{R}$ è induttivo se

- $1 \in A$
- $x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$.

Definiamo $\mathbb{N}$ come l'intersezione di tutti i sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$. E' facile mostrare che $\mathbb{N}$ è un insieme induttivo, quindi che è il più piccolo dei sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$. Questo implica il principio di induzione ed il principio di induzione forte (vedi [1]). Sia $P(n)$ una proprietà che dipende da $n \in \mathbb{N}$.
Principio di induzione: se

- $P(1)$ è vera (base dell'induzione)
- $P(n)$ vera implica $P(n+1)$ vera (passo induttivo)

allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Principio di induzione forte: se

- $P(1)$ è vera (base dell'induzione)
- $P(k)$ vera per $1 \leq k \leq n$ implica $P(n+1)$ vera (passo induttivo)

allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2.2. **Buon ordinamento dei naturali.**

Definizione 2.1. Un insieme ordinato si dice ben ordinato se ogni suo sottoinsieme (non vuoto) ammette minimo.

Proposizione 2.2. I naturali sono ben ordinati.

Dimostrazione. Sia S un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$. Mostreremo che S ha un minimo, ovvero che $\exists\, a \in S$ tale che per ogni $b \in S$, $a \leq b$. Se non fosse così , allora

$$\forall a \in S\ \exists\, b \in S : b < a. \tag{*}$$

Useremo il principio di induzione forte per mostrare che sotto questa ipotesi S è vuoto, cioè una contraddizione. Base dell'induzione: $1 \notin S$ perché $(*)$ è violata, infatti non c'è nessun numero naturale più piccolo di 1. Passo dell'induzione: assumiamo che nessun numero naturale tra 1 ed n appartenga a S e facciamo vedere che allora neanche $n+1$ appartiene a S. Infatti se $n+1$ appartenesse ad S, la proprietà $(*)$ implicherebbe l'esistenza di un numero naturale che preceda $n+1$ e che appartenga ad S, cosa che l'ipotesi induttiva nega. □

Corollario 2.3. Ogni sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ limitato inferiormente ammette minimo.

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ limitato inferiormente, e sia $x \in \mathbb{R}$ un suo minorante. Se $x > 0$ allora $A \subseteq \mathbb{N}$, quindi ha un minimo per la Proposizione 2.2. Se $x \leq 0$, sia $m = \min\{n \in \mathbb{N} : n > -x\}$. Consideriamo l'insieme $A + m = \{a + m, a \in A\}$. Poiché $-m < x \leq a$ per ogni $a \in A$, $A + m$ è fatto di interi positivi, dunque è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$. E' facile vedere che $\min(A + m) - m$ è il minimo di A. □

Definizione 2.4 (Definizione di parte intera di un numero reale)**.** Dato $x \in \mathbb{R}$, chiameremo parte intera di x, e lo indicheremo con $[x]$, il numero intero

$$[x] = -1 + \min\{z \in \mathbb{Z} : z > x\}$$

Dalla definizione segue che $[x]$ è l'unico intero che verifichi $[x] \leq x < [x] + 1$.

2.3. **Approssimazione razionale di numeri reali.** Dato un numero reale x costruiremo per induzione forte una sequenza di intervalli dimezzati $[a_k, b_k]$ in modo che

(1) $x \in [a_k, b_k]$ per ogni $k \geq 0$,
(2) a_k può scriversi come un rapporto tra interi con denominatore 2^k,
(3) $b_k - a_k = 2^{-k}$.

In questo modo anche b_k si può scrivere come un rapporto tra interi con denominatore 2^k, ed in particolare a_k e b_k sono razionali.

- (base dell'induzione) $[a_0, b_0] = [[x], [x] + 1]$
- (passo induttivo) supponiamo di aver costruito gli intervalli $[a_k, b_k]$, $k \leq n$, come richiesto. Definiremo l'intervallo successivo come segue:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, a_n + 2^{-n-1}] & \text{se } x \in [a_n, a_n + 2^{-n-1}) \\ [a_n + 2^{-n-1}, a_n + 2^{-n}] & \text{se } x \in [a_n + 2^{-n-1}, a_n + 2^{-n}]. \end{cases}$$

La verifica delle proprietà (1), (2) e (3) è immediata.

Osservazione 2.5. Per costruzione, $a_n = a_{n-1}$ oppure $a_n - a_{n-1} = 2^{-n}$, quindi $\alpha_n = 2^n(a_n - a_{n-1})$ vale 0 o 1. Chiaramente la coppia data da $[x]$ e dalla sequenza a valori 0 e 1 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ determina la sequenza a valori razionali $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ induttivamente tramite le eguaglianze $a_0 = [x]$, $a_n = a_{n-1} + 2^{-n}\alpha_n$, ed anche la sequenza $\{b_n\}$ tramite $b_n = 2^{-n} + a_n$, dunque determina x quale unica intersezione degli intervalli dimezzati.

3. Sulla cardinalità di alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Ricordiamo che (vedi [1])

- due insiemi hanno la stessa cardinalità se sono in corrispondenza biunivoca;
- un insieme è infinito (ha cardinalità infinita) se esiste un suo sottoinsieme proprio che ha la stessa cardinalità dell'insieme intero;
- i numeri naturali sono un insieme infinito, la sua cardinalità si indica con $\aleph_0$, che è la più piccola cardinalità infinita.

3.1. **Sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ e sequenze binarie.** Ad ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{N}$ associamo una successione $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a valori 0 e 1 così definita:

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in A, \\ 0 & \text{se } n \notin A. \end{cases}$$

Chiameremo una successione a valori 0 e 1 sequenza binaria. Allo steso modo, data una sequenza binaria $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ costruiamo un sottoinsieme A di $\mathbb{N}$ in questo modo:

$$\begin{cases} n \in A & \text{se } a_n = 1, \\ n \notin A & \text{se } a_n = 0. \end{cases}$$

Queste due applicazioni sono una l'inversa dell'altra, quindi forniscono una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$ e l'insieme delle sequenze binarie.

3.2. **Sequenze binarie e intervallo $[0,1]$.** Ad ogni sequenza binaria $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ associamo un numero reale $x \in [0,1]$ tramite la sequenza di intervalli dimezzati

$$[a_n, b_n] = \begin{cases} [0,1], & n = 0 \\ a_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{2^j}, \quad b_n = a_n + 2^{-n}, & n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1}$$

E' facile vedere che ogni intervallo è una metà del precedente, per cui l'intervallo $[a_k, b_k]$ ha lunghezza 2^{-k}. Quindi definiamo x come l'unico punto nell'intersezione $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} [a_k, b_k]$.

Esercizio 3.1. Dato il sottoinsieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari in $\mathbb{N}$, costruire la sequenza binaria associata e calcolare il corrispondente numero reale x associato alla sequenza binaria.

Viceversa, dato un punto $x \in [0,1]$ possiamo costruire una sequenza di intervalli dimezzati $[a_n, b_n]$ in modo che $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ ponendo $[a_0, b_0] = [0,1]$ e definendo a_n e b_n, $n \in \mathbb{N}$, come nel paragrafo 2.3, dunque

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, a_n + 2^{-n-1}] & \text{se } x \in [a_n, a_n + 2^{-n-1}) \\ [a_n + 2^{-n-1}, a_n + 2^{-n}] & \text{se } x \in [a_n + 2^{-n-1}, a_n + 2^{-n}]. \end{cases}$$

Dati gli intervalli dimezzati si può ottenere la sequenza binaria tramite la formula $\alpha_n = 2^n(a_n - a_{n-1})$ (cf. anche (1)).

E' chiaro che la costruzione degli intervalli dimezzati a partire da $x \in [0,1]$ è un'inversa destra della costruzione precedente, cioè se si parte da $x \in [0,1]$ si ottengono intervalli dimezzati $[a_k, b_k]$ la cui intersezione è x. Ma non è l'unica inversa: un'altra scelta si ottiene sostituendo il passo induttivo col seguente:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, a_n + 2^{-n-1}] & \text{se } x \in [a_n, a_n + 2^{-n-1}] \\ [a_n + 2^{-n-1}, a_n + 2^{-n}] & \text{se } x \in (a_n + 2^{-n-1}, a_n + 2^{-n}]. \end{cases}$$

Come si vede, l'unica differenza si ha se x è esattamente il punto medio di un qualche intervallo $[a_{k-1}, b_{k-1}]$, $k \in \mathbb{N}$. In questo caso la prima definizione sceglie l'intervallo destro, la seconda sceglie l'intervallo sinistro.

Osserviamo meglio l'eventualità in cui $\exists k \in \mathbb{N} : x$ è il punto medio di $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ per le due costruzioni degli intervalli dimezzati. Nel primo caso sceglieremo $[a_k, b_k] = [x, b_{k-1}]$, cioè x diventa l'estremo sinistro di $[a_k, b_k]$, e quindi da questo momento in poi sceglieremo sempre l'intervallo di sinistra, ovvero $a_n = x$ per $n \geq k$. Utilizzando la formula per la sequenza binaria si ottiene $\alpha_n = 2^n(a_n - a_{n-1}) = 0$ per $n \geq k+1$, cioè α_n è zero da un certo punto in poi.

Nel secondo caso sceglieremo $[a_k, b_k] = [a_{k-1}, x]$, cioè x diventa l'estremo destro di $[a_k, b_k]$, e quindi da questo momento in poi sceglieremo sempre l'intervallo di destra, ovvero $b_n = x$ per $n \geq k$. Poiché $b_n = a_n + 2^{-n}$, utilizzando la formula per la sequenza binaria si ottiene $\alpha_n = 2^n(a_n - a_{n-1}) = 2^n(b_n - 2^{-n} - b_{n-1} + 2^{-n+1}) = 2^n(b_n - b_{n-1}) - 1 + 2 = 1$ per $n \geq k+1$, cioè α_n vale 1 da un certo punto in poi.

Osservazione 3.2. Abbiamo appena mostrato che la funzione che associa ad una sequenza binaria un numero reale in $[0,1]$ è suriettiva ma non iniettiva. Facciamo ora vedere che il caso appena descritto è l'unico caso di non iniettività. Infatti se $x \in [0,1]$ proviene da due sequenze diverse $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\tilde\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, denotiamo con k il $\min\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \neq \tilde\alpha_n\}$, con $\alpha_k = 1$ e $\tilde\alpha_k = 0$, e chiamiamo $[a_n, b_n]$ e $[\tilde a_n, \tilde b_n]$ i corrispondenti intervalli dimezzati, si ha $a_n = \tilde a_n$, $b_n = \tilde b_n$ per $n < k$, $a_k = a_{k-1} + 2^{-k}\alpha_k = a_{k-1} + 2^{-k}$, $b_k = a_k + 2^{-k}$, $\tilde a_k = a_{k-1} + 2^{-k}\tilde\alpha_k = a_{k-1}$, $\tilde b_k = \tilde a_{k-1} + 2^{-k}$, ovvero i due intervalli di indice k sono contigui, ed hanno come unico punto di intersezione $\tilde b_k = a_k = \tilde a_{k-1} + 2^{-k}$, che deve quindi coincidere con x. Questo implica che tutti i successivi intervalli dimezzati $[a_n, b_n]$ e $[\tilde a_n, \tilde b_n]$, $n > k$ devono contenere x, quindi $[\tilde a_n, \tilde b_n] = [x - 2^{-n}, x]$ e $[a_n, b_n] = [x, x + 2^{-n}]$, $n \geq k$. Dalla formula $\alpha_n = 2^n(a_n - a_{n-1})$ ricaviamo quindi $\alpha_n = 0$ e $\tilde\alpha_n = 1$ per $n > k$.

Come abbiamo visto, i numeri reali $x \in [0,1]$ con doppia scrittura, che cioè provengono da due sequenze binarie diverse, hanno la forma

$$x = a_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{2^j} = \frac{\sum_{j=1}^{k} 2^{k+1-j}\alpha_j}{2^{k+1}}$$

ovvero sono i razionali in $[0,1]$ con denominatore una potenza di 2 (0 e 1 esclusi). In particolare ad ogni sequenza binaria $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che valga 1 in k e 0 da $k+1$ in poi possiamo quindi associarne un'altra che valga 0 in k e 1 da $k+1$ in poi in modo che abbiano la stessa immagine x. Chiaramente questa corrispondenza è biunivoca, ed è descritta dalla formula

$$\tilde\alpha_n = \begin{cases} \alpha_n & \text{se } n < k; \\ 0 & \text{se } n = k; \\ 1 & \text{se } n > k. \end{cases}$$

La discussione precedente implica la seguente:

Proposizione 3.3. Sia S l'insieme delle sequenze binarie, S_0 il sottoinsieme delle sequenze α_n per cui esiste $k \in \mathbb{N} : \alpha_k = 1$ e $\alpha_n = 0$ per $n \geq k+1$. La funzione da $S \setminus S_0$ che associa ad una sequenza binaria un numero reale in $[0,1]$ è biunivoca.

3.3. **L'insieme delle parti di $\mathbb{N}$ e l'insieme dei numeri reali hanno la stessa cardinalità.** Per dimostrare il risultato annunciato nel titolo avremo bisogno di alcuni risultati intermedi.

Proposizione 3.4. Sia S l'insieme delle sequenze binarie, S_0 il sottoinsieme delle sequenze α_n per cui esiste $k \in \mathbb{N} : \alpha_k = 1$ e $\alpha_n = 0$ per $n \geq k+1$, S_1 il sottoinsieme delle sequenze α_n per cui esiste $k \in \mathbb{N} : \alpha_k = 0$ e $\alpha_n = 1$ per $n \geq k+1$.
• S_0 ed S_1 sono disgiunti ed in corrispondenza biunivoca
• S_0 ed S_1 sono numerabili.
• I sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ descritti dalle sequenze binarie in S_0 sono esattamente i sottoinsiemi finiti e non vuoti di $\mathbb{N}$.

Dimostrazione. Nella prima affermazione la disgiunzione è ovvia e la corrispondenza biunivoca è stata costruita sopra. Per quanto riguarda la numerabilità, vista la corrispondenza biunivoca sarà sufficiente dimostrare che S_0 è numerabile. Sia S_0^k l'insieme delle sequenze binarie che valgono 0 per $n \geq k+1$. E' facile vedere che questo insieme è finito (e ha cardinalità 2^k). Poiché $S_0 = \cup_{k\geq 0} S_0^k$, è unione numerabile di insiemi finiti, dunque è numerabile.
Infine, per la terza proprietà, osserviamo che se $\{\alpha_n\}$ è in S_0 allora esiste un $k \in \mathbb{N} : \alpha_n = 0$ per $n \geq k+1$, dunque l'insieme A associato ad α_n non contiene nessun numero $\geq k+1$, dunque è finito. Viceversa, se A è finito non vuoto, e $k = \max A$, allora $\alpha_k = 1$ e $\alpha_n = 0$ per $n \geq k+1$. □

Proposizione 3.5. Sia C un insieme, A e B due sottoinsiemi di C tali che
• A e B sono disgiunti
• B è numerabile;
• esiste una corrispondenza biunivoca $a \in A \mapsto \tilde{a} \in B$.
Allora $\#C = \#(C \setminus A)$.

Dimostrazione. Poiché B è numerabile, esiste una corrispondenza biunivoca $n \in \mathbb{N} \mapsto b(n) \in B$. Costruiamo ora una funzione $\varphi : C \to C \setminus A$.

$$\varphi(c) = \begin{cases} c & \text{se } c \in C \setminus (A \cup B), \\ b(2n) & \text{se } c \in B, c = b(n), n \in \mathbb{N}, \\ b(2n-1) & \text{se } c \in A, c = \tilde{b}(n), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si verifichi per esercizio che questa funzione fornisce una corrispondenza biunivoca. □

Corollario 3.6. $P(\mathbb{N})$ ed $\mathbb{R}$ hanno la stessa cardinalità, ovvero $\#\mathbb{R} = \aleph_1$.

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 3.4 possiamo applicare la Proposizione 3.5 agli insiemi S, S_0 ed S_1, dunque, facendo uso della Proposizione 3.3 si ottiene $\#P(\mathbb{N}) = \#S = \#(S \setminus S_0) = \#[0,1]$. Poiché $\mathbb{R}$ e $[0,1]$ hanno la stessa cardinalità la tesi segue. □

Esercizio 3.7. Dimostrare che $\mathbb{R}$ e $[0,1]$ hanno la stessa cardinalità.
Suggerimento: Passo 1: $\mathbb{R}$ e $(0,1)$ hanno la stessa cardinalità (vedi esercizio 4.1 del tutorato del del 6 ottobre). Passo 2: Mostrare che se A è un insieme infinito ed $x \in A$, $\#A = \#(A \setminus \{x\})$. Passo 3: Mostrare che se A è un insieme infinito ed F è un sottoinsieme finito di A, $\#A = \#(A \setminus F)$.

4. Potenze con esponente reale

4.1. **Radici n-esime di numeri positivi.**

Lemma 4.1. Siano a, x reali positivi, $n \in \mathbb{N}$. Allora

- (i) Se $a^n < x$ esiste $\varepsilon > 0 : (a+\varepsilon)^n < x$.
- (ii) Se $a^n > x$ esiste $\varepsilon > 0 : (a-\varepsilon)^n > x$.

Dimostrazione. (i). Basterà prendere $\varepsilon < 1$ e $\varepsilon < \dfrac{x-a^n}{(a+1)^n}$. Infatti in questo caso

$$\begin{aligned}(a+\varepsilon)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon^k a^{n-k} = a^n + \varepsilon\Big(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\varepsilon^{k-1}a^{n-k}\Big)\\ &\le a^n + \varepsilon\Big(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\Big) \le a^n + \varepsilon(a+1)^n < a^n + \frac{x-a^n}{(a+1)^n}(a+1)^n = x,\end{aligned}$$

ove la prima diseguaglianza segue da $\varepsilon < 1$, la seconda dal maggiorare la somma da 1 a n con la somma da 0 a n, e la terza da $\varepsilon < \dfrac{x-a^n}{(a+1)^n}$.

(ii). Basterà prendere $\varepsilon < 1$ e $\varepsilon < \dfrac{a^n-x}{(a+1)^n}$. Infatti in questo caso

$$\begin{aligned}(a-\varepsilon)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\varepsilon)^k a^{n-k} = a^n - \varepsilon\Big(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-\varepsilon)^{k-1}a^{n-k}\Big)\\ &\ge a^n - \varepsilon\Big(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\Big) \ge a^n - \varepsilon(a+1)^n > a^n - \frac{a^n-x}{(a+1)^n}(a+1)^n = x.\end{aligned}$$

□

Proposizione 4.2. Sia x un numero reale positivo, $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste un unico t reale positivo per cui $t^n = x$. Chiameremo t radice n-esima di x, e lo indicheremo con $\sqrt[n]{x}$.

Dimostrazione. Mostriamo l'esistenza. Sia $A = \{a > 0 : a^n < x\}$, $t = \sup A$ e denotiamo con B l'insieme dei maggioranti di A.
Primo passo: $B = \{b > 0 : b^n \ge x\}$. Infatti, se $b^n \ge x$, $b^n > a^n$ per ogni $a \in A$. Poiché $0 < b^n - a^n = (b-a)\sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k}$ e la somma ha un valore strettamente positivo, dovrà essere $b > a$, overo $b \in B$. Viceversa, se $b \in B$ e fosse per assurdo $b^n < x$, dal Lemma 4.1 (i) esisterebbe $\varepsilon > 0$ per cui $(b+\varepsilon)^n < x$, cioè $b+\varepsilon \in A$, ovvero $b+\varepsilon \le b$, impossibile perché $\varepsilon > 0$.
Secondo passo: $t^n = x$. Poiché $t = \min B$, $t \in B$, quindi $t^n \ge x$. Se per assurdo fosse $t^n > x$, allora dal Lemma 4.1 (ii) esisterebbe $\varepsilon > 0$ per cui $(t-\varepsilon)^n > x$, dunque $t-\varepsilon \in B$, contro la minimalità di t.

Per quanto riguarda l'unicità, osserviamo che se $t^n = s^n = x$, si ha $0 = t^n - s^n = (t-s)\sum_{k=0}^{n-1} t^k s^{n-1-k}$. Poiché $\sum_{k=0}^{n-1} t^k s^{n-1-k} > 0$, per il principio di annullamento del prodotto (cf. esercizio 3 del 26 settembre) deve annullarsi $t-s$, ovvero $t = s$. □

4.2. **Potenze con esponente razionale.** Se x è un reale positivo e $r \in \mathbb{Q}$, con $r = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, definiamo x^r come $(\sqrt[n]{x})^m$.

Lasciamo per esercizio la verifica delle principali proprietà delle potenze con esponente razionale:

Esercizio 4.3.
(1) Mostrare che x^r è ben definito, cioè non dipende dalla rappresentazione di r come rapporto tra interi.
(2) Verificare che $a^r b^r = (ab)^r$, $a^{r+s} = a^r a^s$ e $(a^r)^s = a^{rs}$, con $a, b > 0$ e $r, s \in \mathbb{Q}$, a partire dalle corrispondenti proprietà nel caso di esponente intero.
(3) Dimostrare che se $a, b > 0$ e r è un razionale positivo $a^r > b^r \Leftrightarrow a > b$, e che se $a > 1$ e $r, s \in \mathbb{Q}$ allora $a^r < a^s \Leftrightarrow r < s$.

4.3. **Potenze con esponente reale.** Vogliamo definire la potenza c^x ove c è un numero reale positivo e x è un numero reale. Cominceremo col definire c^x nel caso $c > 1$, il caso $c = 1$ essendo banale e definendo, per $c < 1$, $c^x = (1/c)^{-x}$.

Fissato $x \in \mathbb{R}$, costruiamo le approssimazioni razionali di x tramile gli intervalli dimezzati $[a_k, b_k]$ come nel paragrafo 2.3. Poiché a_k e b_k sono razionali, possiamo considerare le successioni $\{c^{a_k}\}, \{c^{b_k}\}$, con $k \in \mathbb{N}$. Poiché $c > 1$, $c^{a_k} < c^{b_k}$. Dimostreremo che $[c^{a_k}, c^{b_k}]$ sono intervalli inscatolati generalizzati (cf. esercizio 1.1 del tutorato del del 6 ottobre), e definiremo quindi c^x come l'unico punto di intersezione degli intervalli $[c^{a_k}, c^{b_k}]$.

Proposizione 4.4. Gli intervalli $[c^{a_k}, c^{b_k}]$ formano una famiglia di intervalli inscatolati generalizzati, ovvero posto $\ell_n = c^{b_k} - c^{a_k}$, si ha che la successione ℓ_n^{-1} è superiormente illimitata. Dunque c^x, definito come l'unico punto di intersezione, è ben definito. Se $x \in \mathbb{Q}$, l'intersezione degli $[c^{a_k}, c^{b_k}]$ coincide con c^x, ovvero la definizione di potenza con esponente reale estende quella di potenza con esponente razionale.

Dimostrazione. Ricordiamo che $b_n - a_n = 2^{-n}$. Se dunque nella diseguaglianza $(1+t)^k \geq 1 + kt$, $t \geq -1$, vedi esercizio 4 del 28 settembre, si pone $k = 2^n$ e $t = c^{(2^{-n})} - 1$, si ottiene

$$c = \left(1 + c^{(2^{-n})} - 1\right)^{(2^n)} = (1+t)^k \geq 1 + kt = 1 + 2^n\left(c^{(2^{-n})} - 1\right),$$

da cui

$$\ell_n = c^{b_n} - c^{a_n} = c^{a_n}\left(c^{(2^{-n})} - 1\right) \leq \frac{c^{a_n}(c-1)}{2^n} \leq 2^{-n}\left(c^{b_1}(c-1)\right).$$

Passando agli inversi si ha $\ell_n^{-1} \geq 2^n\left(c^{b_1}(c-1)\right)^{-1}$, cioè la non limitatezza superiore di ℓ_n^{-1}. Nel caso $x \in \mathbb{Q}$, le diseguaglianze $a_n \leq x \leq b_n$ implicano le corrispondenti $c^{a_n} \leq c^x \leq c^{b_n}$, dunque c^x appartiene alla intersezione degli intervalli inscatolati generalizzati, che è unica, ovvero coincide con la definizione generale. □

Proposizione 4.5. Sia $c > 0$ un numero reale. Allora la funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto c^x \in \mathbb{R}$ è l'unica funzione monotona che coincide con quella definita per esponente razionale.

Le proprietà (2) e (3) dell'esercizio 4.3 valgono anche per esponenti reali.

Dimostrazione. Se $c > 1$, $x \in \mathbb{R}$ e $[a_n, b_n]$ è la successione di intervalli dimezzati che individua il punto x, affinché c^x sia crescente deve aversi $c^{a_n} \leq c^x \leq c^{b_n}$, dunque necessariamente c^x deve coincidere con l'unico punto di intersezione degli intervalli inscatolati generalizzati $[c^{a_n}, c^{b_n}]$. Il caso $c < 1$ si dimostra in modo analogo, ma c^x è decrescente e quindi gli intervalli inscatolati generalizzati sono $[c^{b_n}, c^{a_n}]$.

Passiamo ora alla proprietà (3) dell'esercizio 4.3, e osserviamo che la prima affermazione si può riscrivere $c^r > 1 \Leftrightarrow c > 1$ con $c = a/b$, $r > 0$. Dunque entrambe le proprietà possono dedursi dalla monotonicità dimostrata sopra.

Per quanto riguarda la proprietà (2) dell'esercizio 4.3 supponiamo che a, b siano > 1, e che $r \in \mathbb{R}$ sia individuato dalla successione $[q_n, t_n]$ di intervalli inscatolati con estremi razionali. Allora

$$(ab)^{q_n} = a^{q_n} b^{q_n} \leq a^r b^r \leq a^{t_n} b^{t_n} = (ab)^{t_n}, \quad (ab)^{q_n} \leq (ab)^r \leq (ab)^{t_n},$$

dunque sia $a^r b^r$ sia $(ab)^r$ appartengono all'intersezione degli intervalli inscatolati generalizzati $[(ab)^{q_n}, (ab)^{t_n}]$, perciò coincidono. Per gli altri valori di a e b la dimostrazione è analoga. Infine, se r è individuato dagli intervalli dimezzati $[q_n, t_n]$ e s dagli intervalli dimezzati $[u_n, v_n]$, si ottiene, utilizzando la proprietà (2),

$$a^{q_n u_n} = (a^{q_n})^{u_n} \leq (a^r)^{u_n} \leq (a^r)^s \leq (a^r)^{v_n} \leq (a^{t_n})^{v_n} = a^{t_n v_n},$$

ma anche $a^{q_n u_n} \leq a^{rs} \leq a^{t_n v_n}$, quindi $(a^r)^s, a^{rs} \in [a^{q_n u_n}, a^{t_n v_n}]$, $n \in \mathbb{N}$. Poiché

$$t_n v_n - q_n u_n = t_n v_n - t_n u_n + t_n u_n - q_n u_n = 2^{-n} t_n + 2^{-n} u_n \leq 2^{-n}(r + s + 2),$$

è facile vedere, come nella Proposizione 4.4, che la successione $[a^{q_n u_n}, a^{t_n v_n}]$ è fatta da intervalli inscatolati generalizzati. Dunque l'intersezione consta di un unico punto, ovvero $(a^r)^s = a^{rs}$. □

References

[1] Enrico Giusti, *Analisi Matematica 1*. Terza edizione interamente riveduta e ampliata. Bollati Boringhieri, Torino, 2002.