Problem Set 1

docente: Luciano Gualà

Esercizio 1 (*notazione asintotica*)
Siano $f(n), g(n), h(n)$ tre funzioni asintoticamente positive. Inoltre, sia $c > 1$ una costante reale positiva. Si dimostrino o confutino le seguenti affermazioni:

1. $2^{f(n)+2^c} = \Theta(2^{f(n)})$.
2. $g(n) = \Theta(1)$ implica $2^{f(n)+g(n)} = O(2^{f(n)})$.
3. $g(n) = o(f(n))$ implica $2^{f(n)+g(n)} = O(2^{f(n)})$.
4. $f(n) + g(n) + h(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n), h(n)\})$.
5. $f(n) = \Theta(\log n)$ implica $\log n^{f(n)} = O(\log^c n^{g(n)})$.
6. $f(n) = \Theta(f(c \cdot n))$.
7. $f(n) = \Theta(f(c + n))$.

Esercizio 2
Sia $A[1 : n]$ un vettore ordinato di n interi distinti. Ogni $A[i]$ può essere positivo, negativo o zero. Progettare un algoritmo con complessità temporale $o(n)$ che trova, se esiste, un indice i tale che $A[i] = i$.

Esercizio 3
Sia $A[1 : n]$ un vettore di n numeri distinti, dove n è una potenza di 2. Progettare un algoritmo che individua i due elementi più grandi di A effettuando al più $n + \log_2 n - 2$ confronti.[1]

E se si volessero individuare i k elementi più grandi in al più $n+k \log_2 n-k-1$ confronti?

Esercizio 4 *(il dollar game su grafi a cammino)*
Il gioco si gioca su un grafo a cammino di n nodi $1, 2, \ldots, n$. Inizialmente ad ogni nodo i è associato un intero s_i che rappresenta il numero di dollari che quel nodo possiede; s_i può essere positivo, zero o negativo. Quando s_i è negativo si dice che i è in *debito*. L'unica mossa ammissibile è `push`(i), che trasferisce dal nodo i un dollaro su ogni vicino, quindi un dollaro sul nodo $i + 1$ (se esiste) e uno sul nodo $i - 1$ (se esiste); il numero di dollari sul nodo i quindi diminuisce di 2, se i non è un estremo del cammino, di 1 altrimenti. La mossa `push`(i) è sempre ammissibile, anche se porta il nodo i in debito o se i è già in debito prima della mossa. L'obiettivo del gioco è trovare una sequenza di mosse che porta ad una configurazione in cui non ci sono nodi in debito. Un esempio di istanza e soluzione è data in Figura 1.

Data un'istanza del gioco, sia $B = \sum_{1=1}^{n} s_i$ il *budget* complessivo dell'istanza.

(a) Si dimostri che l'istanza è risolvibile se e solo se $B \geq 0$.

(b) Si progetti un algoritmo veloce che data un'istanza con $B \geq 0$ trova una sequenza di mosse che la risolve. Si argomenti sulla correttezza dell'algoritmo e sulla sua complessità temporale.

[1] Si noti che si sta vincolando (superiormente) solo il numero di confronti effettuati dall'algoritmo (e quindi tutte le altre operazioni sono gratis) e che tale delimitazione è esatta e non asintotica.

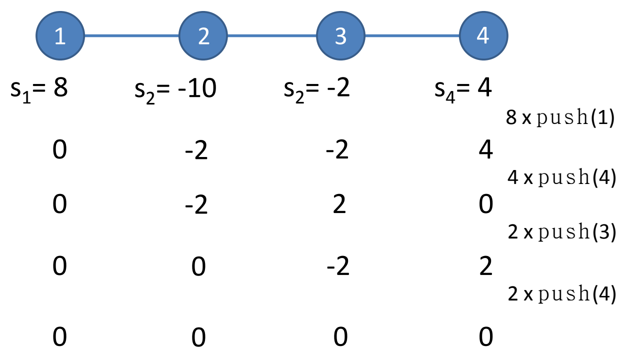

Figura 1: Un'istanza di *dollar game* su un cammino di 4 nodi e una possibile soluzione.