

Problem Set 1

docente: Luciano Gualà

Esercizio 1 (notazione asintotica)

Siano $f(n), g(n), h(n)$ tre funzioni asintoticamente positive. Inoltre, sia $c > 1$ una costante reale positiva. Si dimostrino o confutino le seguenti affermazioni:

1. $2^{f(n)+2^c} = \Theta(2^{f(n)})$.
2. $g(n) = \Theta(1)$ implica $2^{f(n)+g(n)} = O(2^{f(n)})$.
3. $g(n) = o(f(n))$ implica $2^{f(n)+g(n)} = O(2^{f(n)})$.
4. $f(n) + g(n) + h(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n), h(n)\})$.
5. $f(n) = \Theta(\log n)$ implica $\log n^{f(n)} = O(\log^c n^{g(n)})$.
6. $f(n) = \Theta(f(c \cdot n))$.
7. $f(n) = \Theta(f(c + n))$.

Esercizio 2 (trovare l'intero mancante)

Sia $A[1 : n]$ un vettore ordinato di n interi distinti compresi fra 1 e $n + 1$. Chiaramente A contiene tutti gli elementi dell'insieme $\{1, 2, \dots, n+1\}$ tranne uno. Progettare un algoritmo con complessità temporale $o(n)$ che trova l'elemento mancante.

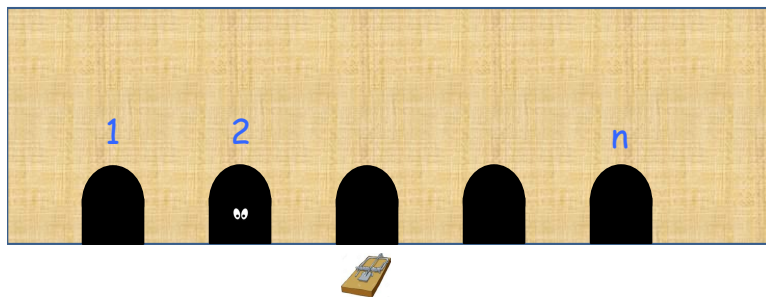


Figura 1: La parete che ospita le n tane del topo e i potenti mezzi che il prof. Gualà ha per catturarlo.

Esercizio 3 (Un topo a lezione di algoritmi)

Nell'aula in cui si svolgono le lezioni di algoritmi c'è un topo che il prof. Gualà vuole catturare. Il topo può muoversi fra n tane, allineate contro il muro dell'aula, numerate

per comodità da 1 a n . Per catturare il topo, il prof. Gualà ha a disposizione una potente trappola a molla. La trappola può essere sistemata in una qualsiasi tana. All'inizio il topo è in una delle tane (il prof. Gualà non sa quale) e ogni minuto *deve* spostarsi in una tana adiacente a quella in cui è. Lo spostamento del topo fa scattare la molla della trappola. In particolare, quando il topo si sposta dalla tana A alla tana B , se la trappola si trova nella tana B , il topo viene catturato, altrimenti la trappola scatta senza successo e il prof. Gualà può tirarla fuori e risistamarla nuovamente (si veda la Figura 1).

Si progetti una strategia (un algoritmo) che sia in grado di catturare sempre il topo con $O(n)$ tentativi (indipendentemente da dove si trova all'inizio e da come decide di spostarsi in ogni minuto). Se per esempio ci sono $n = 3$ tane, una strategia è quella di mettere per due volte consecutive la trappola nella tana centrale. Infatti, se il topo all'inizio si trova in una delle due tane laterali (la tana 1 o la tana 3) verrà catturato al primo tentativo. Altrimenti, dopo il primo tentativo il topo sicuramente si trova nella tana 1 o nella tana 3 e viene quindi catturato al secondo tentativo. Si discuta anche l'eventuale ottimalità asintotica della soluzione proposta.