Problem Set 1

docente: Luciano Gualà

Esercizio 1 (*notazione asintotica*)
Siano $f(n), g(n), h(n)$ tre funzioni asintoticamente positive. Inoltre, sia $c > 1$ una costante reale positiva. Si dimostrino o confutino le seguenti affermazioni:

1. $2^{f(n)+2^c} = \Theta(2^{f(n)})$.
2. $g(n) = \Theta(1)$ implica $2^{f(n)+g(n)} = O(2^{f(n)})$.
3. $g(n) = o(f(n))$ implica $2^{f(n)+g(n)} = O(2^{f(n)})$.
4. $f(n) + g(n) + h(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n), h(n)\})$.
5. $f(n) = \Theta(\log n)$ implica $\log n^{f(n)} = O(\log^c n^{g(n)})$.
6. $f(n) = \Theta(f(c \cdot n))$.
7. $f(n) = \Theta(f(c + n))$.

Esercizio 2 (*trovare l'intero mancante*)
Sia $A[1 : n]$ un vettore ordinato di n interi distinti compresi fra 1 e $n + 1$. Chiaramente A contiene tutti gli elementi dell'insieme $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ tranne uno. Progettare un algoritmo con complessità temporale $o(n)$ che trova l'elemento mancante.

Esercizio 3 (*trovare l'intero mancante: un gioco di prestigio*)
Un vostro amico sa fare il seguente gioco di magia. Per un certo n, vi chiede di scegliere un valore nell'insieme $\{1, 2, \ldots, n + 1\}$ senza dirlo, e di elencare, in un qualsiasi ordine, gli n elementi restanti. Quando voi avete finito di elencare gli elementi lui sa indovinare l'elemento che manca. La cosa che trovate sorprendente è che il vostro amico è in grado di eseguire questo gioco per valori di n piuttosto grandi (una volta ve l'ha fatto per $n = 200$), senza usare fogli su cui scrivere e facendo passare poco tempo fra un numero e l'altro. Ora, siete sicuri che il vostro amico non è in grado di ricordare tutti i numeri che gli snocciolate e quindi deve esserci un trucco. Ma quale? Forse ragionare in modo algoritmico può aiutarvi.

Per essere più precisi, considerate questo problema. Avete un vettore $A[1 : n]$ non ordinato di n interi distinti compresi fra 1 e $n + 1$. Progettate un algoritmo che scorre A una sola volta da sinistra a destra e che alla fine calcola l'elemento mancante. L'algoritmo deve avere complessità temporale $O(n)$ e deve usare memoria ausiliaria costante.

Esercizio 4 Si consideri una tavoletta di cioccolata rettangolare composta da n file di m quadratini di cioccolata. Si vuole spezzarla in modo da avere tutti i quadratini di cioccolata separati. Una strategia consiste in una serie di *spezzate*, dove ogni spezzata è può essere vista come una procedura che prende un pezzo di cioccolata (di qualsiasi forma) e lo separa in due pezzi di cioccolata (di qualsiasi forma). Una semplice strategia è quella di separare prima le n file eseguendo $n-1$ spezzate orizzontali, e poi per ognuna delle n file eseguire $m-1$ spezzate verticali per separare i relativi quadratini. Questa strategia esegue complessivamente:

$$n - 1 + n(m - 1) = n - 1 + nm - n = nm - 1$$

spezzate. Esiste una strategia migliore, cioè una strategia che separa tutti i quadratini eseguendo un numero minore di spezzate? Si argomenti la risposta.