

Problem Set 1

docente: Luciano Gualà

Esercizio 1 (*notazione asintotica*)

Siano $f(n), g(n), h(n)$ tre funzioni asintoticamente positive. Inoltre, sia $c > 1$ una costante reale positiva. Si dimostrino o confutino le seguenti affermazioni:

1. $2^{f(n)+2^c} = \Theta(2^{f(n)})$.
2. $g(n) = \Theta(1)$ implica $2^{f(n)+g(n)} = O(2^{f(n)})$.
3. $g(n) = o(f(n))$ implica $2^{f(n)+g(n)} = O(2^{f(n)})$.
4. $f(n) + g(n) + h(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n), h(n)\})$.
5. $f(n) = \Theta(\log n)$ implica $\log n^{f(n)} = O(\log^c n^{g(n)})$.
6. $f(n) = \Theta(f(c \cdot n))$.
7. $f(n) = \Theta(f(c + n))$.

Esercizio 2 Sia $A[1 : n]$ un vettore ordinato di n elementi booleani, ovvero di zeri e di uni. Si progettino due algoritmi che restituiscano il numero di zeri nel vettore. Il primo algoritmo deve avere complessità temporale $O(\log n)$, mentre il secondo deve avere una complessità computazionale di $O(\log k)$, dove k è il numero di zeri nel vettore. Algoritmi come quest'ultimo sono detti *output sensitive*, perché la loro complessità temporale è espressa in funzione dell'output dell'algoritmo (piuttosto che in funzione della dimensione dell'istanza). Si noti, inoltre, che la complessità richiesta per il secondo algoritmo non è mai peggiore di $O(\log n)$ ma può essere (anche asintoticamente) migliore per le istanze in cui k è molto più piccolo di n .

Esercizio 3 Si consideri una sequenza di n pedine allineate in cui ogni pedina è colorata di rosso, di verde o di bianco. Una mossa consiste nello scambiare di posto due pedine adiacenti della sequenza. Si vogliono riposizionare le pedine in modo che i loro colori formino la bandiera italiana (cioè compaiano nell'ordine, da sinistra a destra, prima tutte le pedine verdi, poi le bianche e infine le rosse).

Progettare un algoritmo che risolve il problema con un numero asintoticamente ottimo di scambi. Dimostrarne l'ottimalità.

Esercizio 4 (*problemi algoritmici, puzzle e modelli di calcolo.*) Si consideri una sequenza di n pedine allineate in cui ogni pedina è colorata di rosso, di verde o di bianco. Una mossa consiste nello scambiare di posto due pedine della sequenza (non necessariamente adiacenti). Si vogliono riposizionare le pedine in modo che i loro colori formino la bandiera italiana (cioè compaiano nell'ordine, da sinistra a destra, prima tutte le pedine verdi, poi le bianche e infine le rosse).

- Progettare un algoritmo che risolve il problema effettuando al più $O(n)$ scambi.

- Si noti che, nella precedente versione, si sta implicitamente assumendo un modello di calcolo in cui le uniche operazioni che hanno un costo sono le operazioni di scambio. In particolare, non è conteggiato il costo per individuare le pedine da scambiare. Si supponga adesso che le pedine siano elementi di un vettore $A[1 : n]$ e si progetti un algoritmo con complessità temporale $O(n)$ e complessità spaziale $O(1)$. Anche in questo caso l'unica mossa ammissibile è quella di scambiare due elementi del vettore, ma il costo computazionale dell'algoritmo è misurato come numero (asintotico) di operazioni elementari nel modello RAM (a costi uniformi).