

Problem Set 1

docente: Luciano Gualà

Esercizio 1 (*riscaldamento*)

Si consideri l'algoritmo `Fibonacci3` presentato a lezione che, preso in ingresso un intero n , calcola il numero di Fibonacci di ordine n . Si assuma che la linea di codice j -esima esegua c_j operazioni elementari. Si dimostri formalmente che la complessità temporale dell'algoritmo è $\Theta(n)$. Si ricordi che il modello di calcolo considerato è quello RAM a costi uniformi.

Esercizio 2 (*notazione asintotica*)

Siano $f(n), g(n), h(n)$ tre funzioni asintoticamente positive. Inoltre, sia $c > 1$ una costante reale positiva. Si dimostrino o confutino le seguenti affermazioni:

1. $2^{f(n)+2^c} = \Theta(2^{f(n)})$.
2. $g(n) = \Theta(1)$ implica $2^{f(n)+g(n)} = O(2^{f(n)})$.
3. $g(n) = o(f(n))$ implica $2^{f(n)+g(n)} = O(2^{f(n)})$.
4. $f(n) + g(n) + h(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n), h(n)\})$.
5. $f(n) = \Theta(\log n)$ implica $\log n^{f(n)} = O(\log^c n^{g(n)})$.
6. $f(n) = \Theta(f(c \cdot n))$.
7. $f(n) = \Theta(f(c + n))$.

Esercizio 3 Sia $A[1 : n]$ un array di n ordinato in modo non decrescente, tale che per ogni $i = 1, \dots, n$, $A[i] \in \{1, 2, 3\}$. Si progetti un algoritmo con complessità temporale $O(\log n)$ che calcoli il numero di due presenti in A .

Esercizio 4 Si consideri una tavoletta di cioccolata rettangolare composta da n file di m quadratini di cioccolata. Si vuole spezzarla in modo da avere tutti i quadratini di cioccolata separati. Una strategia consiste in una serie di *spezzate*, dove ogni spezzata è può essere vista come una procedura che prende un pezzo di cioccolata (di qualsiasi forma) e lo separa in due pezzi di cioccolata (di qualsiasi forma). Una semplice strategia è quella di separare prima le n file eseguendo $n-1$ spezzate orizzontali, e poi per ognuna delle n file eseguire $m-1$ spezzate verticali per separare i relativi quadratini. Questa strategia esegue complessivamente:

$$n - 1 + n(m - 1) = n - 1 + nm - n = nm - 1$$

spezzate. Esiste una strategia migliore, cioè una strategia che separa tutti i quadratini eseguendo un numero più piccolo di spezzate? Si argomenti la risposta.