

Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 11

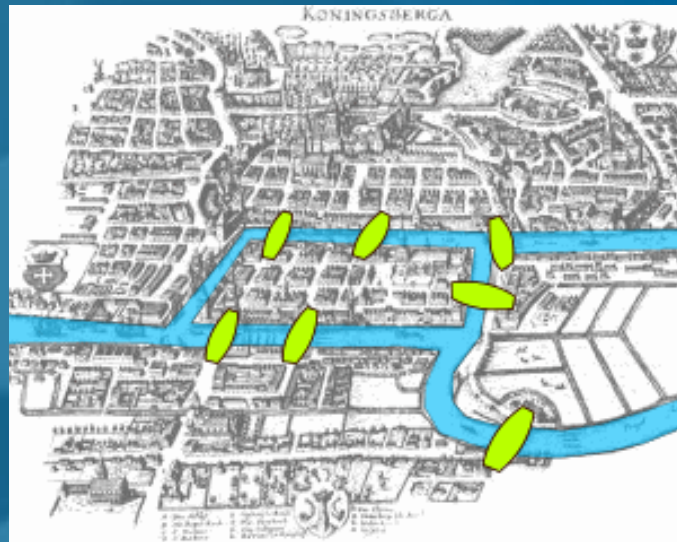
Grafi e visite di grafi



grafi, teoria dei grafi,
problemi su grafi

Origini storiche

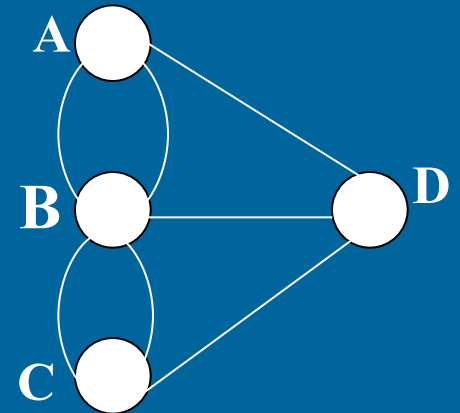
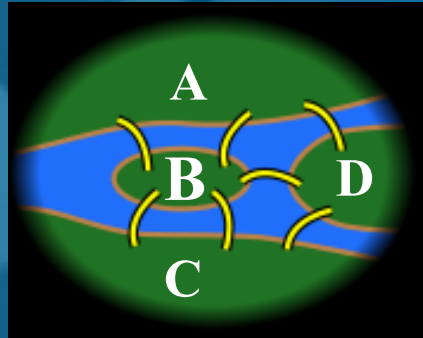
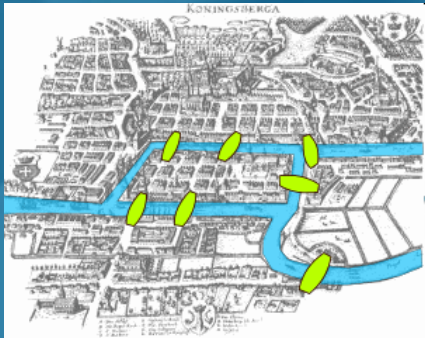
Nel 1736, il matematico Eulero, affrontò l'annoso problema dei 7 ponti di Königsberg (Prussia):



È possibile o meno fare una passeggiata che parta da un qualsiasi punto della città e percorra una ed una sola volta ciascuno dei 7 ponti?

Origini storiche (2)

Eulero affrontò il problema schematizzando **topologicamente** la pianta della città, epurando così l'istanza da insignificanti dettagli **topografici**:



...e così Königsberg venne rappresentata con un insieme di **4 punti** (uno per ciascuna zona della città), opportunamente uniti da **7 linee** (una per ciascun ponte)

Definizione di grafo

(non orientato)

Un grafo $G=(V,E)$ consiste in:

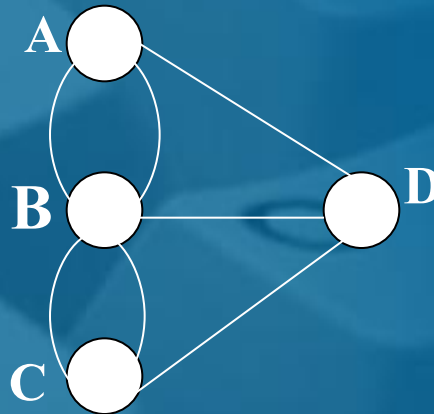
- un insieme V di vertici (o nodi);
- un insieme E di coppie (non ordinate) di vertici, detti archi.

Esempio

Grafo di Eulero associato alla città di Königsberg:

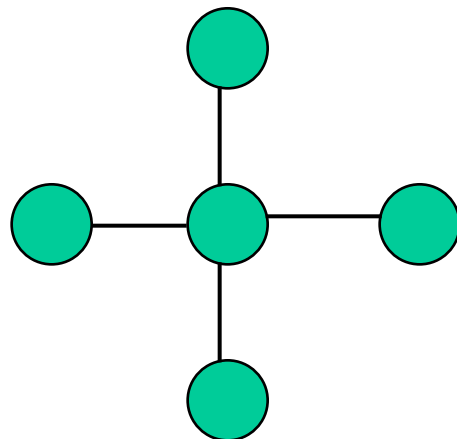
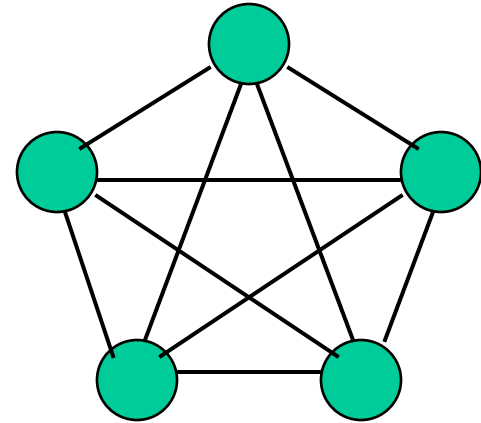
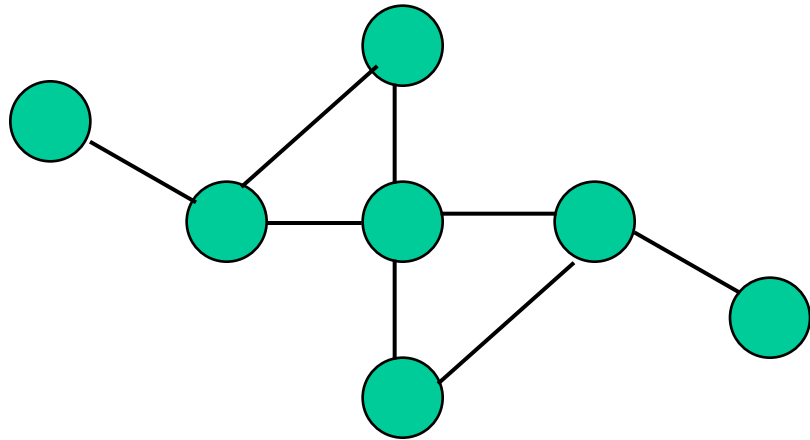
$$V = \{A, B, C, D\},$$

$$E = \{(A, B), (A, B), (A, D), (B, C), (B, C), (B, D), (C, D)\}$$



Nota: È più propriamente detto **multigrafo**,
in quanto contiene **archi paralleli**.

...esempi

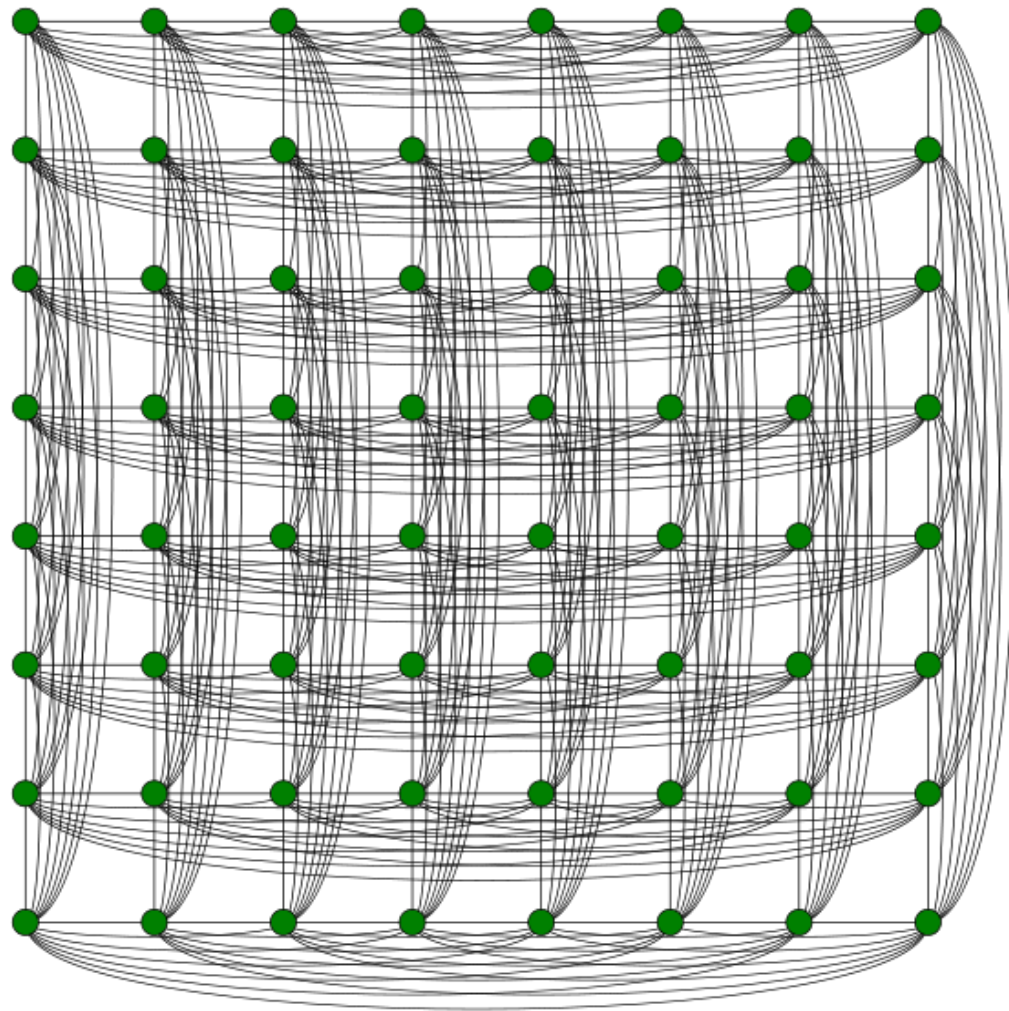


Rook's Graph



un nodo per ogni
posizione della scacchiera

c'è un arco fra due
nodi/posizioni
se e solo se
una torre può spostarsi
dall'una all'altra
posizione

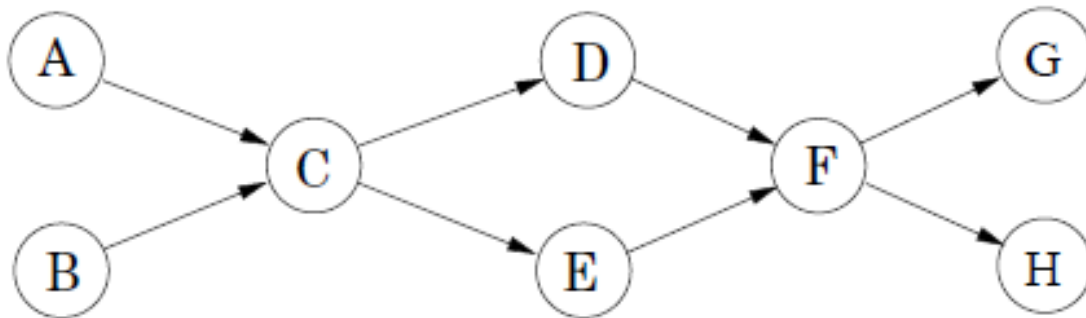
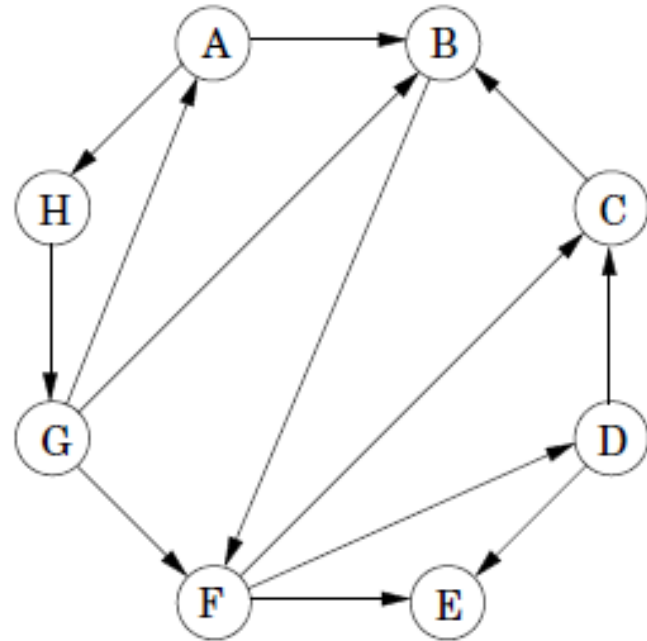
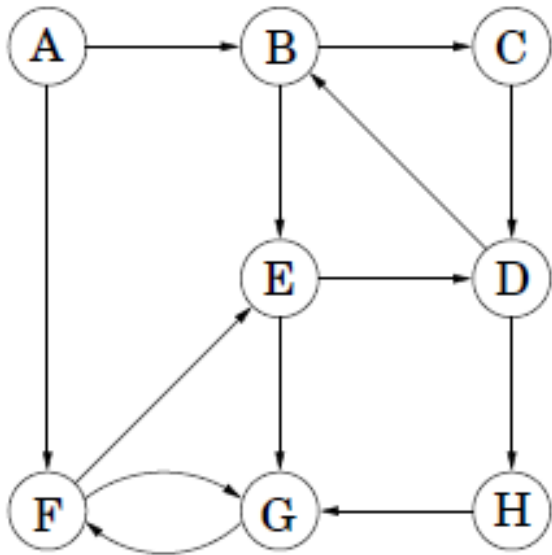


Definizione di grafo diretto

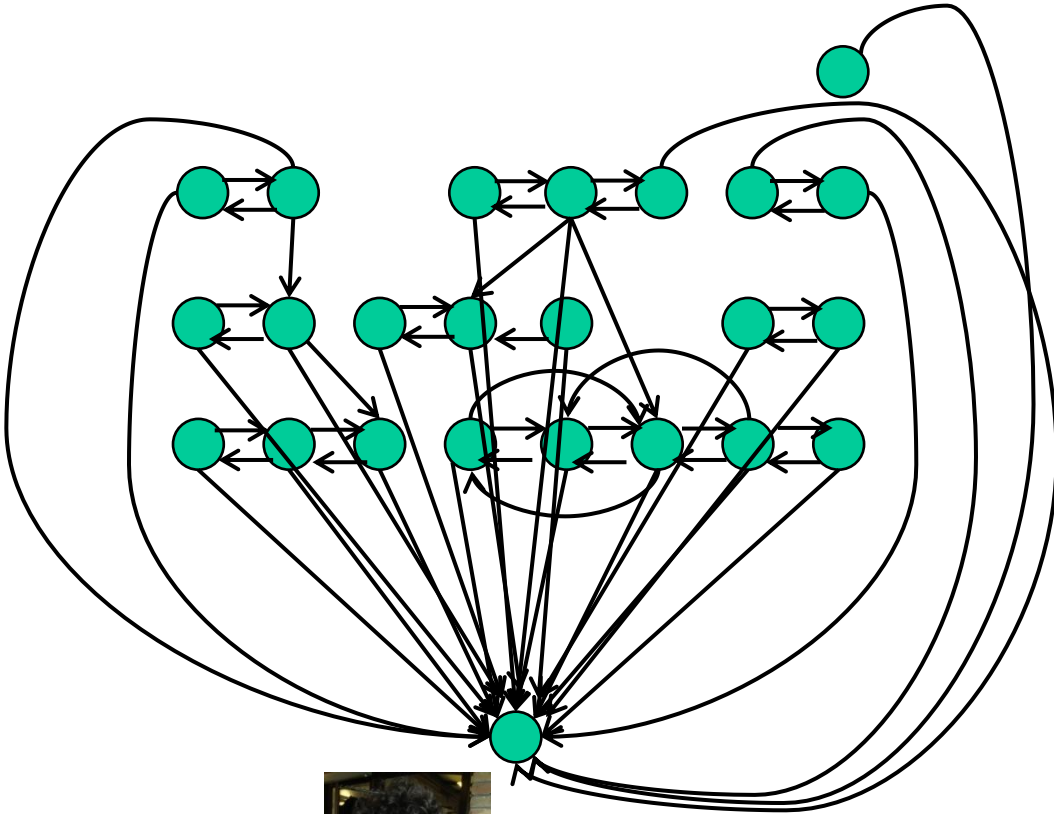
Un **grafo diretto** $D=(V,A)$ consiste in:

- un insieme V di **vertici** (o **nodi**);
- un insieme A di coppie **ordinate** di vertici, detti **archi diretti**.

...esempi



un altro esempio: grafo sociale della classe di ASD



i **nodi** rappresentano
le persone in aula

c'è un **arco** (u,v) se
la **u** conosce
nome e cognome di **v**

Terminologia

$G=(V,E)$ grafo non diretto

$n=|V|$ numero di vertici

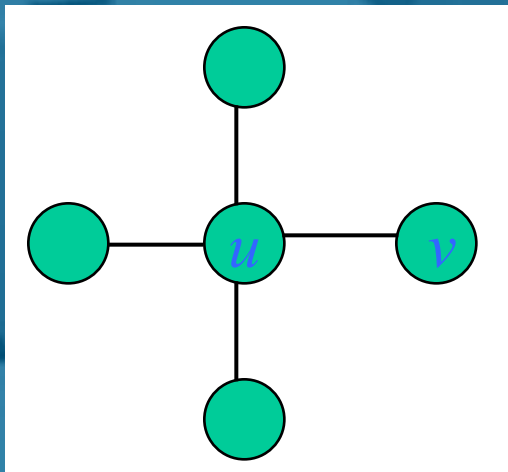
$m=|E|$ numero di archi

u ed v sono **adiacenti**

(u,v) è **incidente** a u e a v (detti **estremi**)

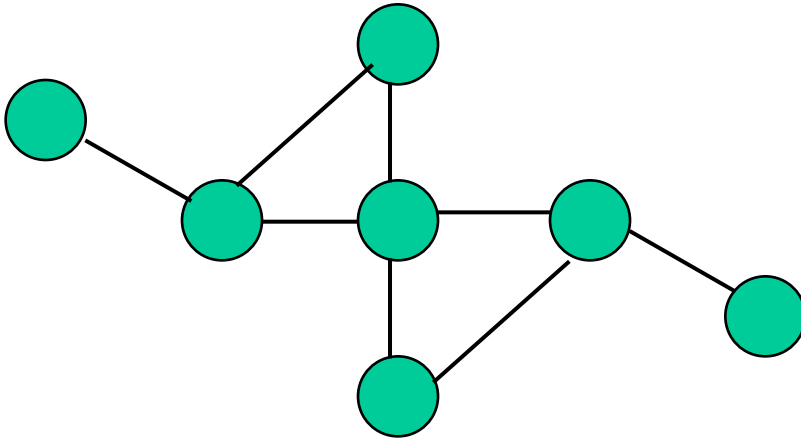
$\delta(u)$: **grado** di u : #archi incidenti a u

grado di $G = \max_{v \in V} \{ \delta(v) \}$



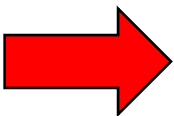
*che relazione c'è fra
grado dei nodi e numero
di archi?*

Una semplice proprietà



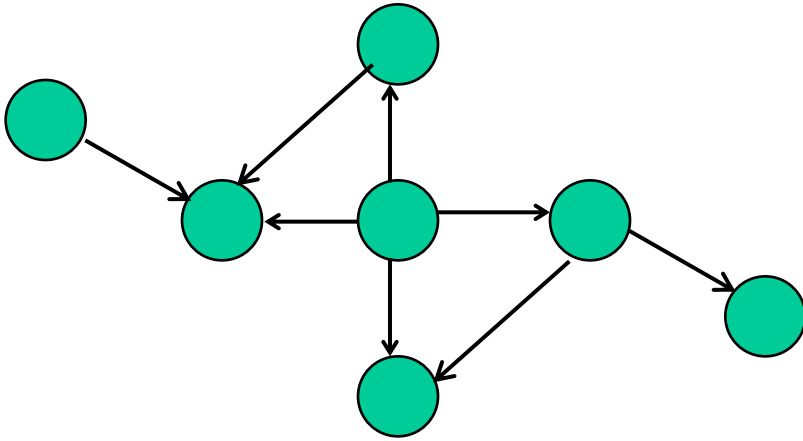
cosa ottengo se sommo
i gradi di ogni nodo?

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m$$

 in ogni grafo
il numero di nodi
di grado dispari
è pari

domanda (sui grafi diretti):
cosa ottengo se sommo il grado
uscente/entrante di tutti i nodi?

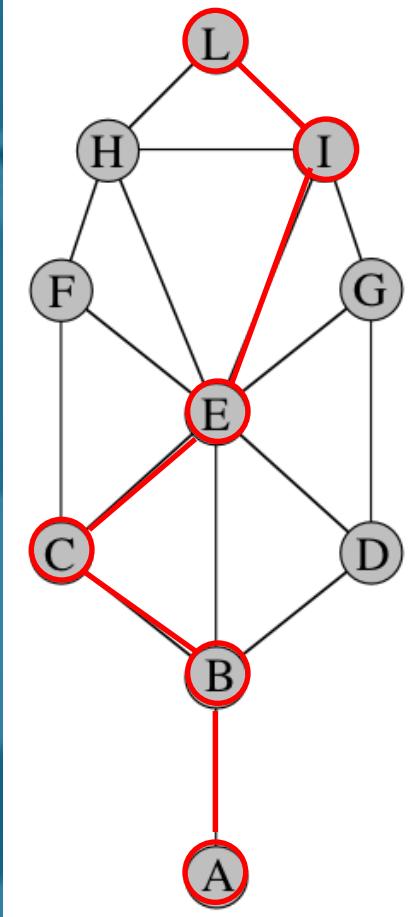
Una semplice proprietà



cosa ottengo se sommo
i gradi di ogni nodo?

$$\sum_{v \in V} \delta_{\text{out}}(v) = \sum_{v \in V} \delta_{\text{in}}(v) = m$$

Terminologia

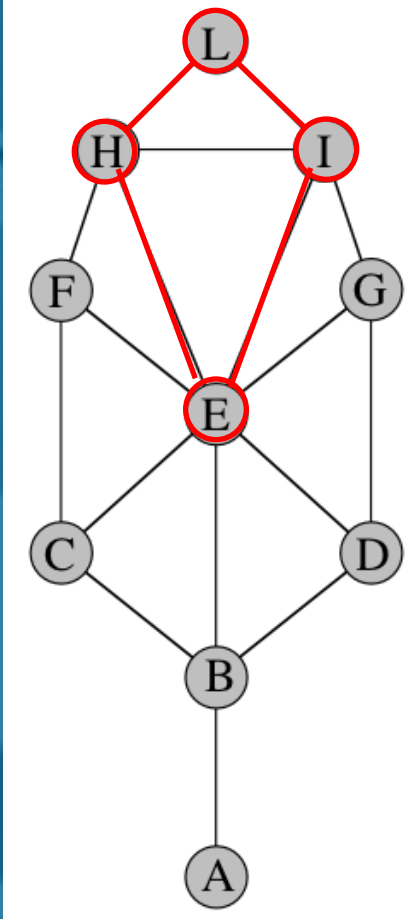


- *cammino*: sequenza di nodi connessi da archi
- *lunghezza di un cammino*: #archi del cammino
- *distanza*: La lunghezza del più corto cammino tra due vertici si dice *distanza* tra i due vertici

distanza fra L e A: 4

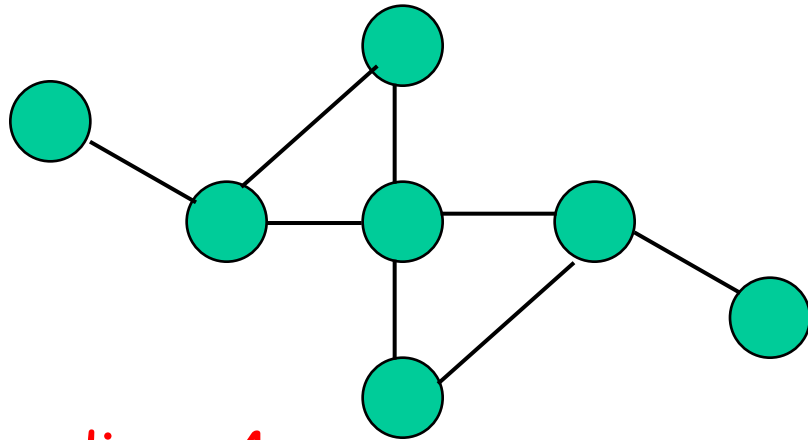
in un grafo è **orientato**, il cammino deve rispettare il verso di orientamento degli archi

Terminologia

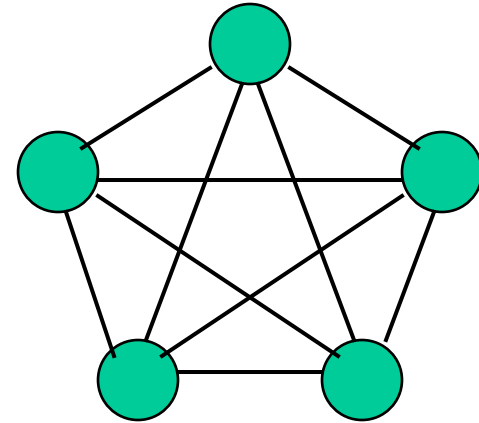


- **G** è **connesso** se esiste un cammino per ogni coppia di vertici
- **ciclo**: un cammino **chiuso**, ovvero un cammino da un vertice a se stesso
- il **diametro** è la massima distanza fra due nodi
 - $\max_{u,v \in V} \text{dist}(u,v)$
 - il diametro di un grafo non connesso è ∞

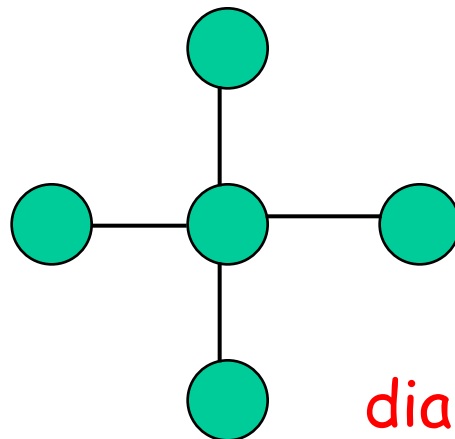
...esempi



diam=4



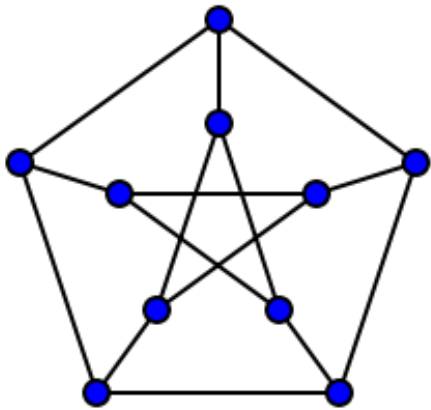
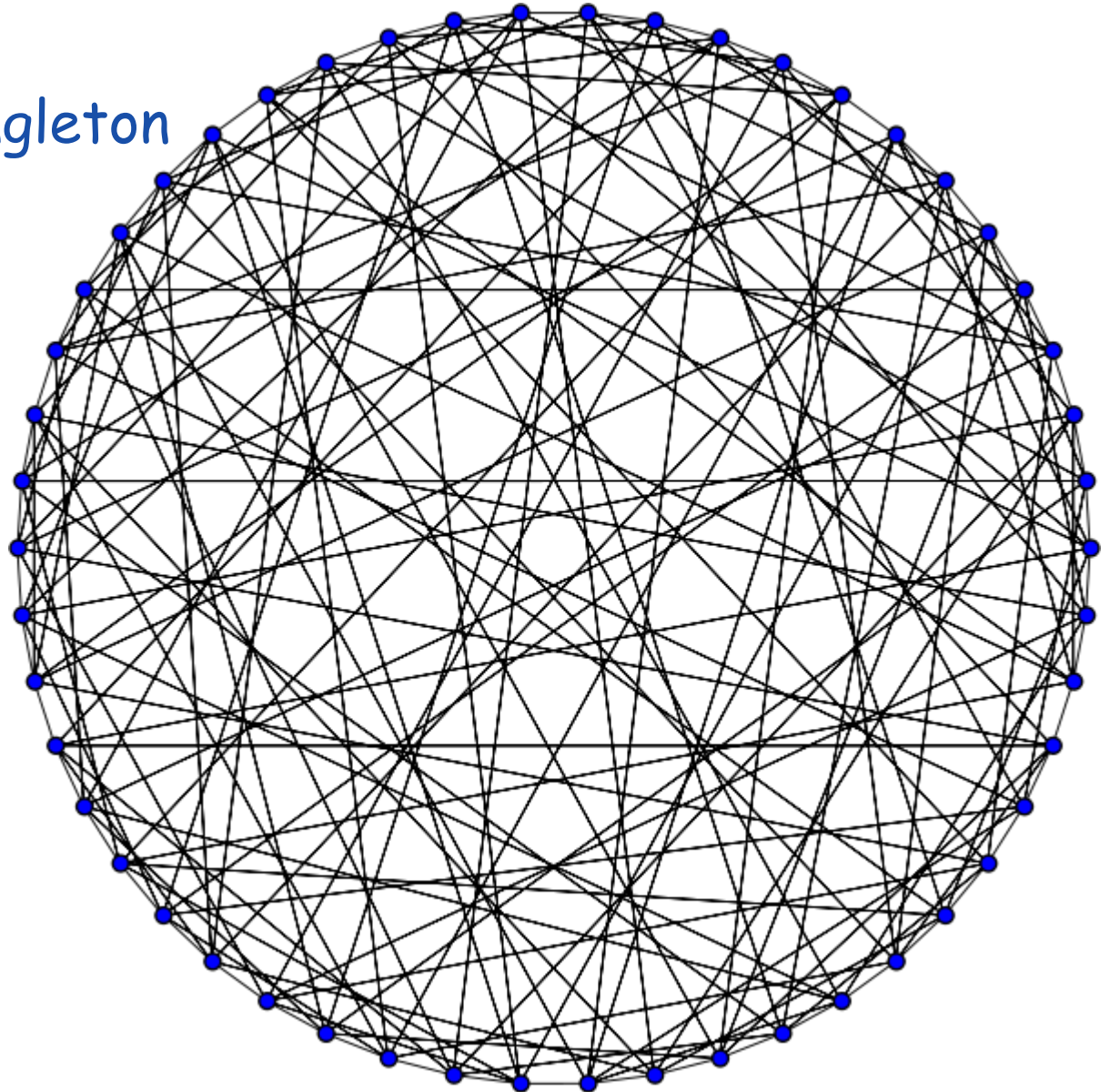
diam=1



diam=2

...altri due grafi di diametro 2

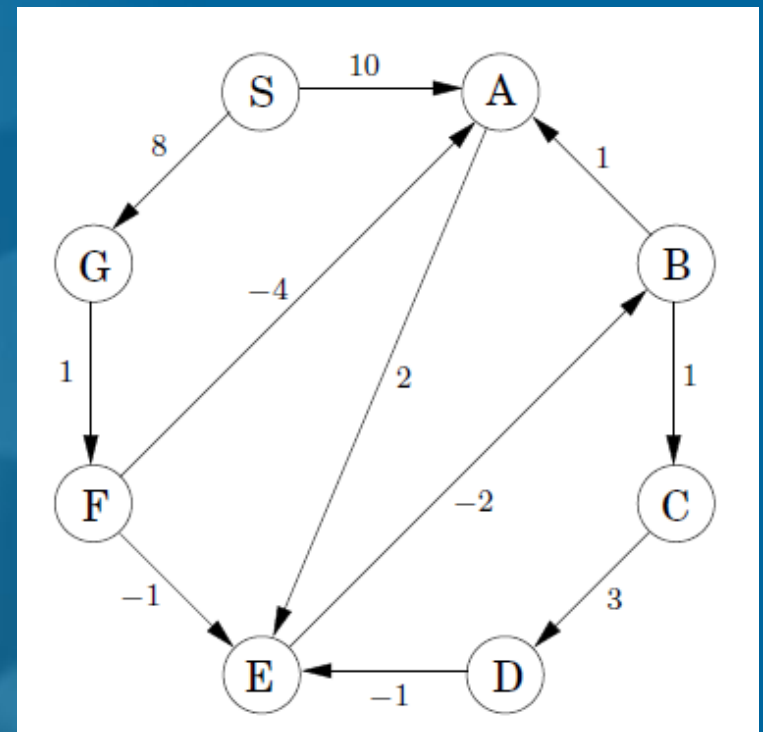
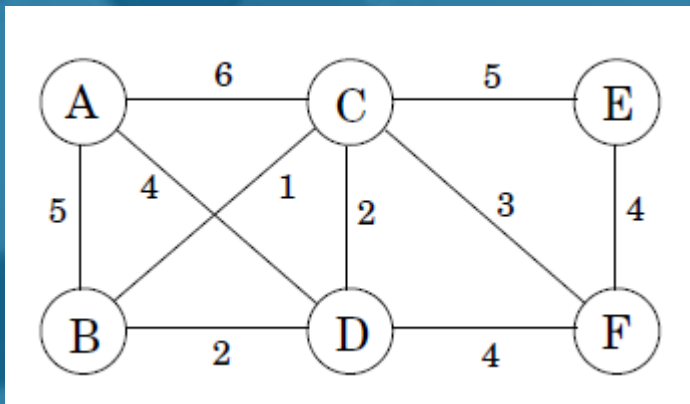
grafo
Hoffman-Singleton



grafo di
Petersen

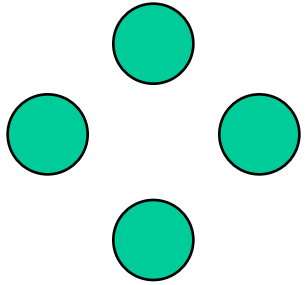
Terminologia

- **Grafo pesato**: è un grafo $G=(V,E,w)$ in cui ad ogni arco viene associato un valore definito dalla funzione peso w (definita su un opportuno insieme, di solito i reali).



*quanti archi può avere
un grafo di n nodi?*

due grafi molto particolari

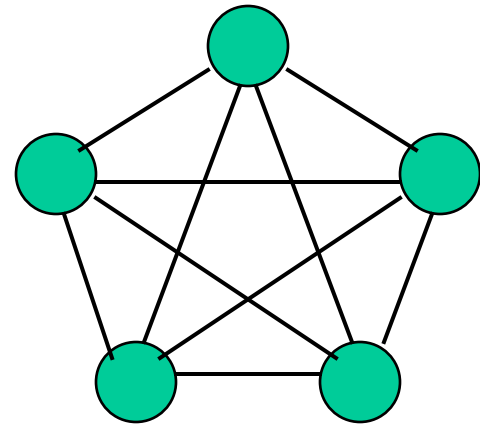


Grafo totalmente sconnesso: è un grafo $G=(V,E)$ tale che $V \neq \emptyset$ ed $E = \emptyset$.

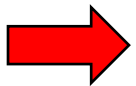
Grafo completo: per ogni coppia di nodi esiste un arco che li congiunge.

Il grafo completo con n vertici verrà indicato con K_n

$$m = |E| = n \cdot (n-1) / 2$$



K_5

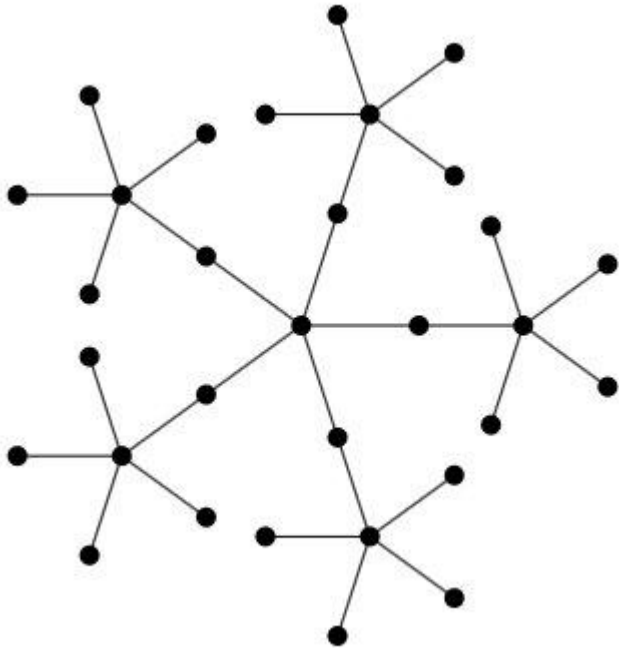


un grafo (senza cappi o archi paralleli) può avere un numero di archi m compreso tra 0 e $n(n-1)/2 = \Theta(n^2)$.

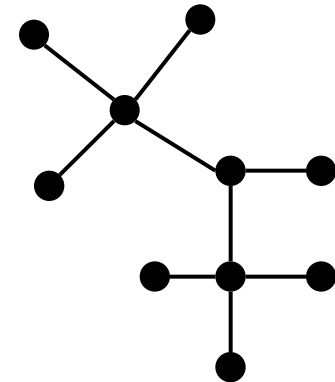
*come è fatto un grafo
connesso con il minimo
numero di archi?*

Definizione

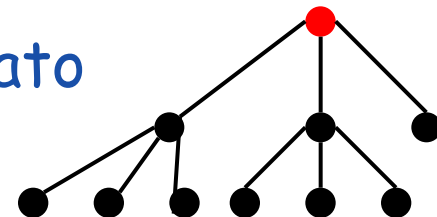
Un albero è un grafo connesso ed aciclico.



libero



radicato



Teorema

Sia $T=(V,E)$ un albero; allora $|E|=|V|-1$.


dim. (per induzione su $|V|$)

caso base: $|V|=1$ T \bullet $|E|=0=|V|-1$

caso induttivo: $|V|>1$

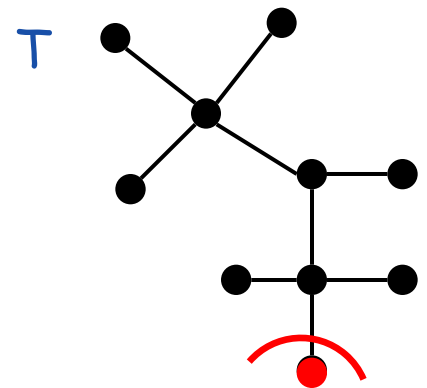
Sia k il numero di nodi di T

poiché T è connesso e aciclico ha almeno una foglia (nodo con grado 1)

se tutti i nodi avessero grado almeno 2 ci sarebbe un ciclo 
(riuscite a vedere perché?)

rimuovendo tale foglia si ottiene grafo connesso e aciclico con $k-1$ nodi che per ipotesi induttiva ha $k-2$ archi

 T ha $k-1$ archi



Esercizio

Sia $G=(V,E)$ un grafo non orientato. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono tutte equivalenti:

- (a) G è un albero;
- (b) due vertici qualsiasi di G sono collegati da un unico cammino semplice;
- (c) G è connesso, ma se viene rimosso un arco qualsiasi da E , non grafo risultante non è connesso;
- (d) G è connesso e $|E|=|V|-1$;
- (e) G è aciclico e $|E|=|V|-1$;
- (f) G è aciclico, ma se un arco qualsiasi viene aggiunto a E , il grafo risultante contiene un ciclo.



per un grafo connesso con n nodi e m archi vale:

$$n-1 \leq m \leq n(n-1)/2$$

Esercizio

Sia $G=(V,E)$ un grafo non orientato. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono tutte equivalenti:

- (a) G è un albero;
 - (b) due vertici qualsiasi di G sono collegati da un unico cammino semplice;
 - (c) G è connesso, ma se viene rimosso un arco qualsiasi da E , il grafo risultante non è connesso;
 - (d) G è connesso e $m = \Omega(n)$ e $m = O(n^2)$ se G è connesso
 - (e) G è aciclico
 - (f) G è aciclico e $m = \Omega(n)$ e $m = O(n^2)$ se G è connesso
- risultato

$$m = \Omega(n) \text{ e } m = O(n^2)$$

grafo

per un grafo connesso con n nodi e m archi vale:

$$n-1 \leq m \leq n(n-1)/2$$

Nota bene: se un grafo ha $m \geq n-1$ archi, non è detto che sia connesso. Quanti archi deve avere un grafo per essere **sicuramente connesso**?

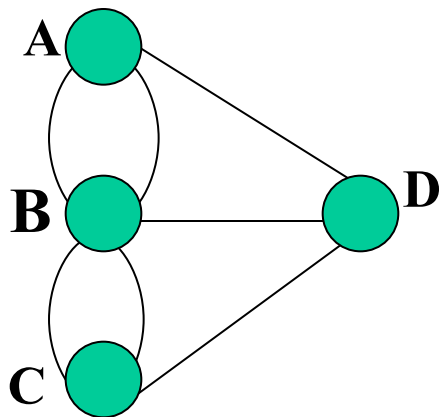
Definizione

...tornando al problema dei 7 ponti

Dato un grafo G , un **ciclo** (rispettivamente un **cammino**) **Euleriano** è un ciclo (rispettivamente un **cammino** non chiuso) di G che passa per tutti gli archi di G una e una sola volta.

Teorema (di Eulero)

Un grafo G ammette un **ciclo Euleriano** se e solo se tutti i nodi hanno grado pari. Inoltre, ammette un **cammino Euleriano** se e solo se tutti i nodi hanno grado pari tranne due (i due nodi di grado dispari sono gli estremi del cammino).



il problema dei 7 ponti non ammette soluzione!



perché i grafi?

i grafi costituiscono un linguaggio potente
per descrivere oggetti e problemi
algoritmici

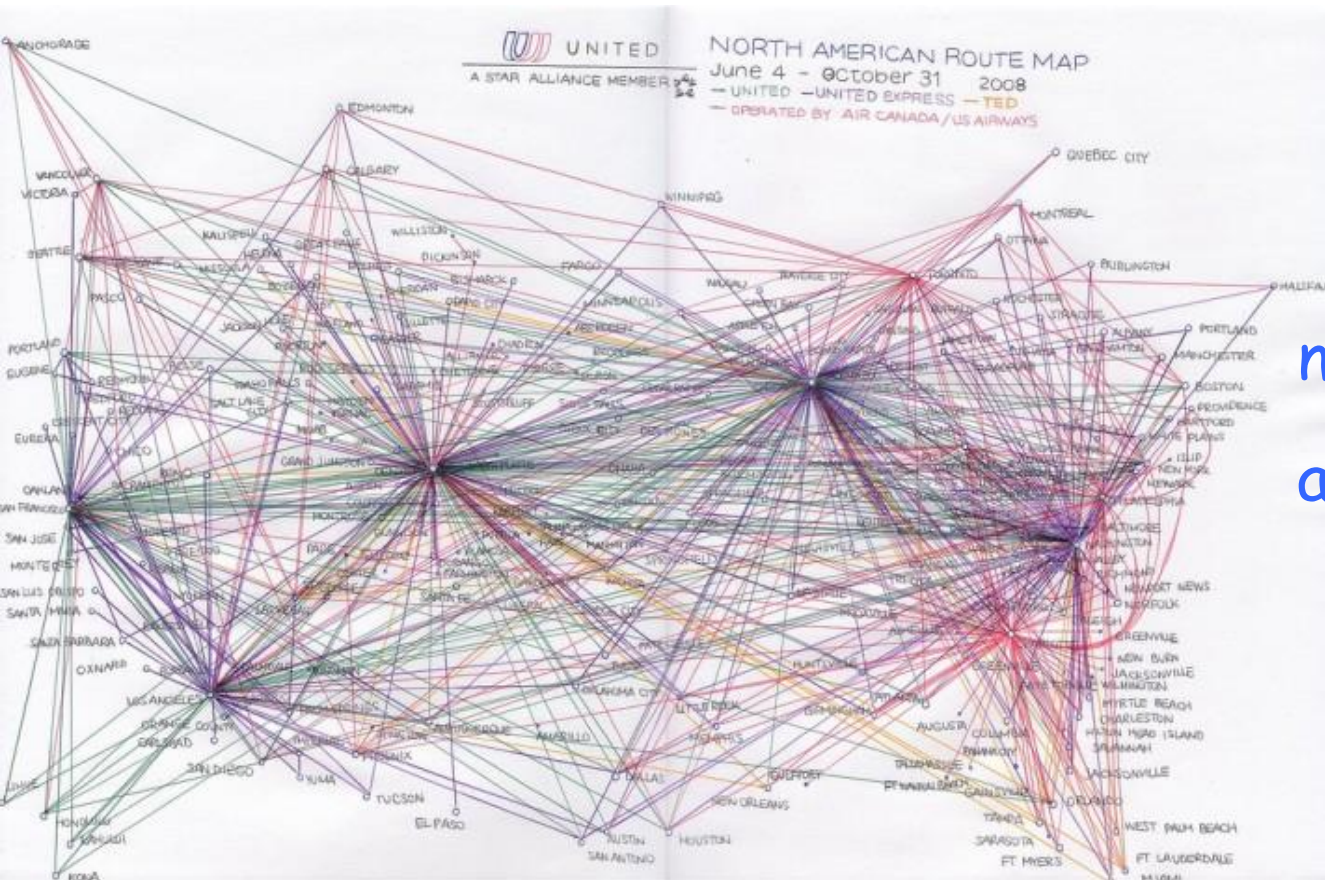
reti stradali e di trasporto



nodi: incroci

archi: strade

reti stradali e di trasporto



nodi: aeroporti

archi: rotte aeree

reti stradali e di trasporto



nodi: fermate

archi: tratte metro

Londra

reti stradali e di trasporto



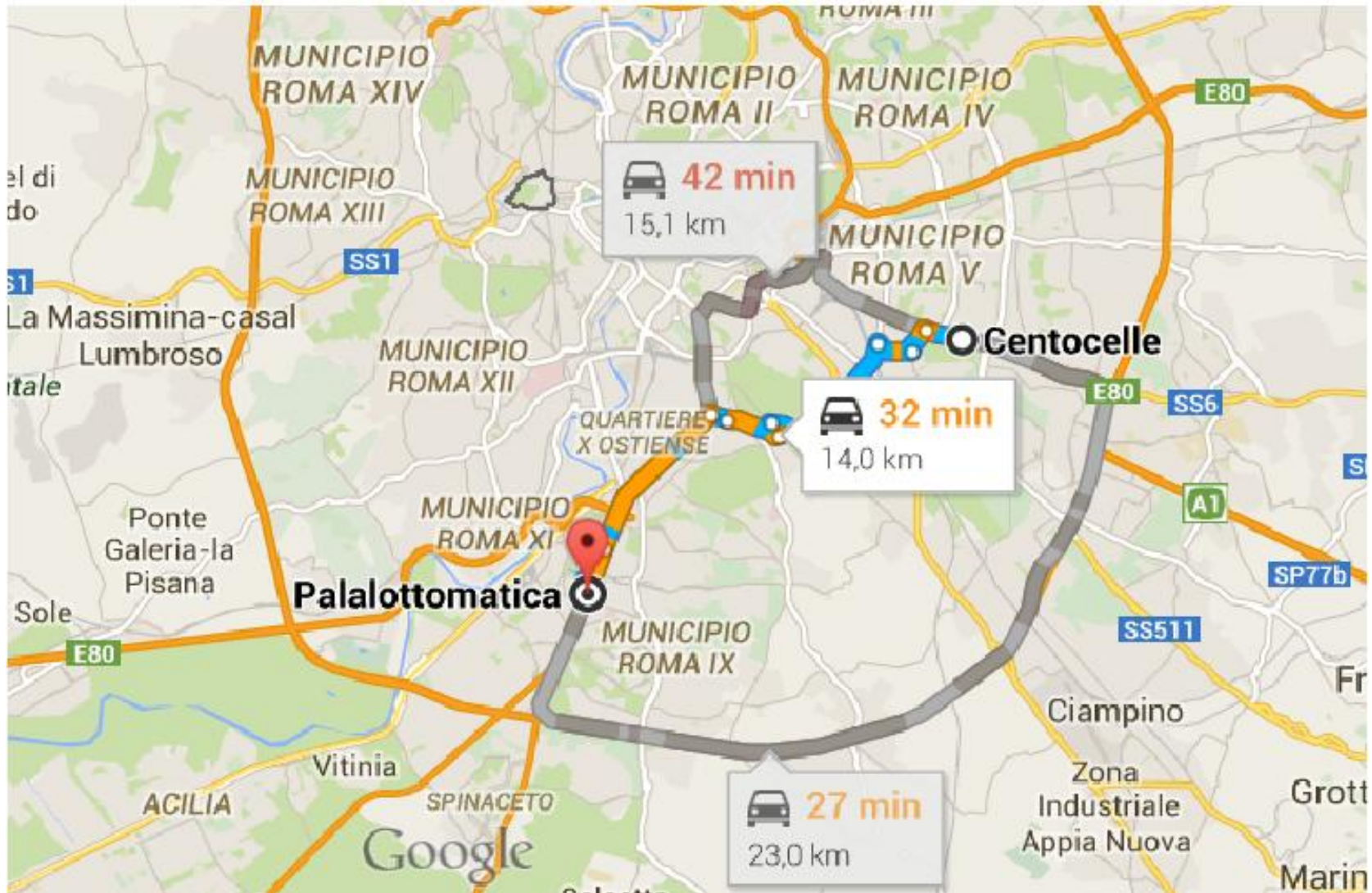
nodi: fermate

archi: tratte metro

Roma

... attualmente aciclico ☹️
ma almeno è connesso 😊

problema:
trovare il cammino minimo fra due nodi



problema:
trovare il cammino minimo fra due nodi



pesi archi:
lunghezze



strada
più breve

pesi archi:
tempo
percorrenza

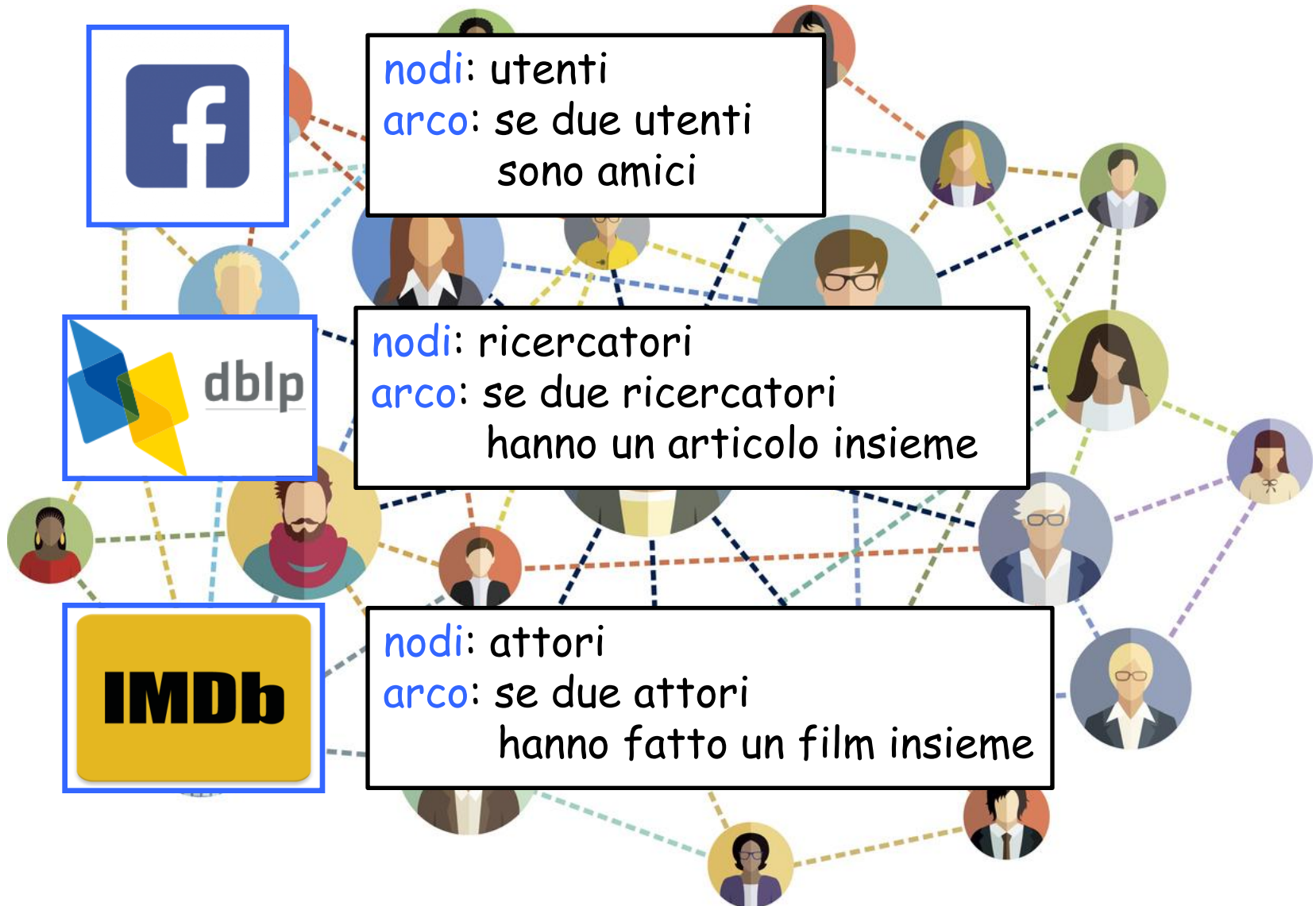


strada
più veloce

reti sociali



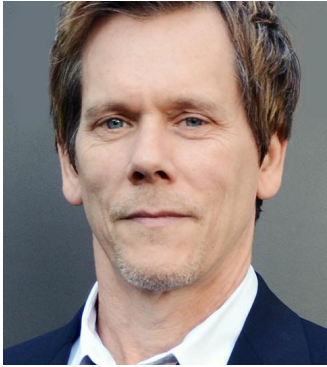
reti sociali







Kevin Bacon Number: distanza dal nodo Kevin Bacon

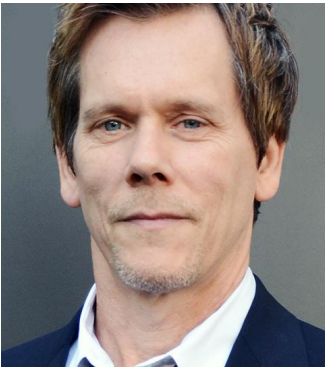


Kevin Bacon



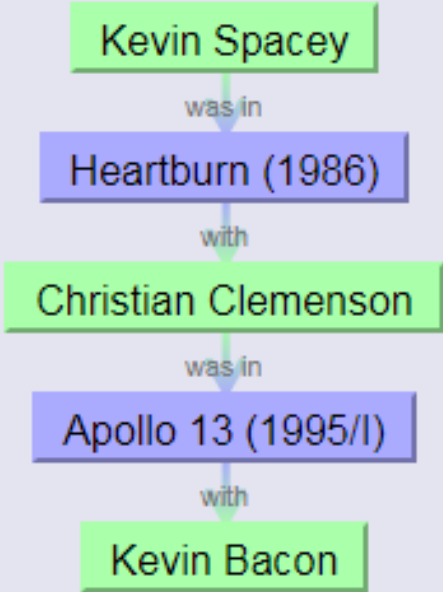
Ryan Gosling

Kevin Bacon Number: distanza dal nodo Kevin Bacon



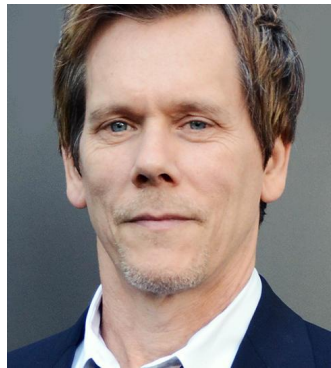
Kevin Bacon

Kevin Spacey has a Bacon number of 2.



Kevin Spacey

Kevin Bacon Number: distanza dal nodo Kevin Bacon

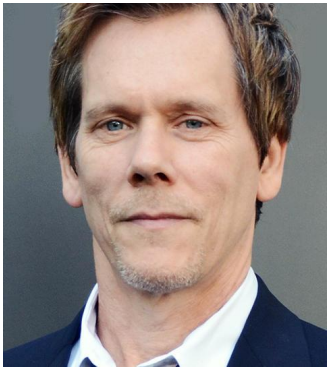


Kevin Bacon



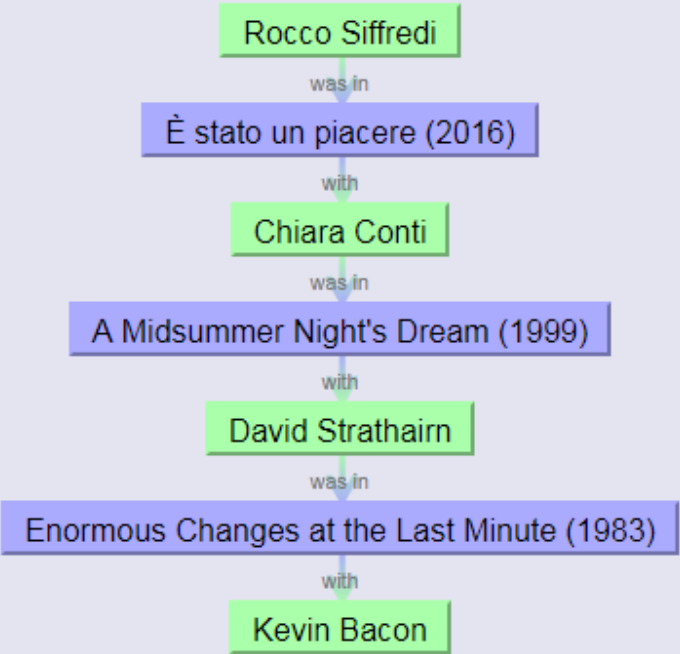
Millie Bobby Brown

Kevin Bacon Number: distanza dal nodo Kevin Bacon



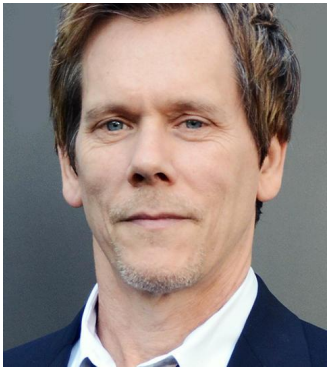
Kevin Bacon

Rocco Siffredi has a Bacon number of 3.



Rocco Siffredi

Kevin Bacon Number: distanza dal nodo Kevin Bacon



Kevin Bacon

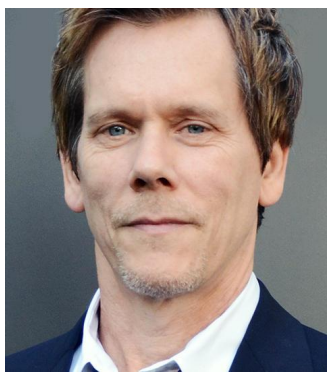
Paolo Villaggio has a Bacon number of 2.



Paolo Villaggio

Kevin Bacon Number: distanza dal nodo Kevin Bacon

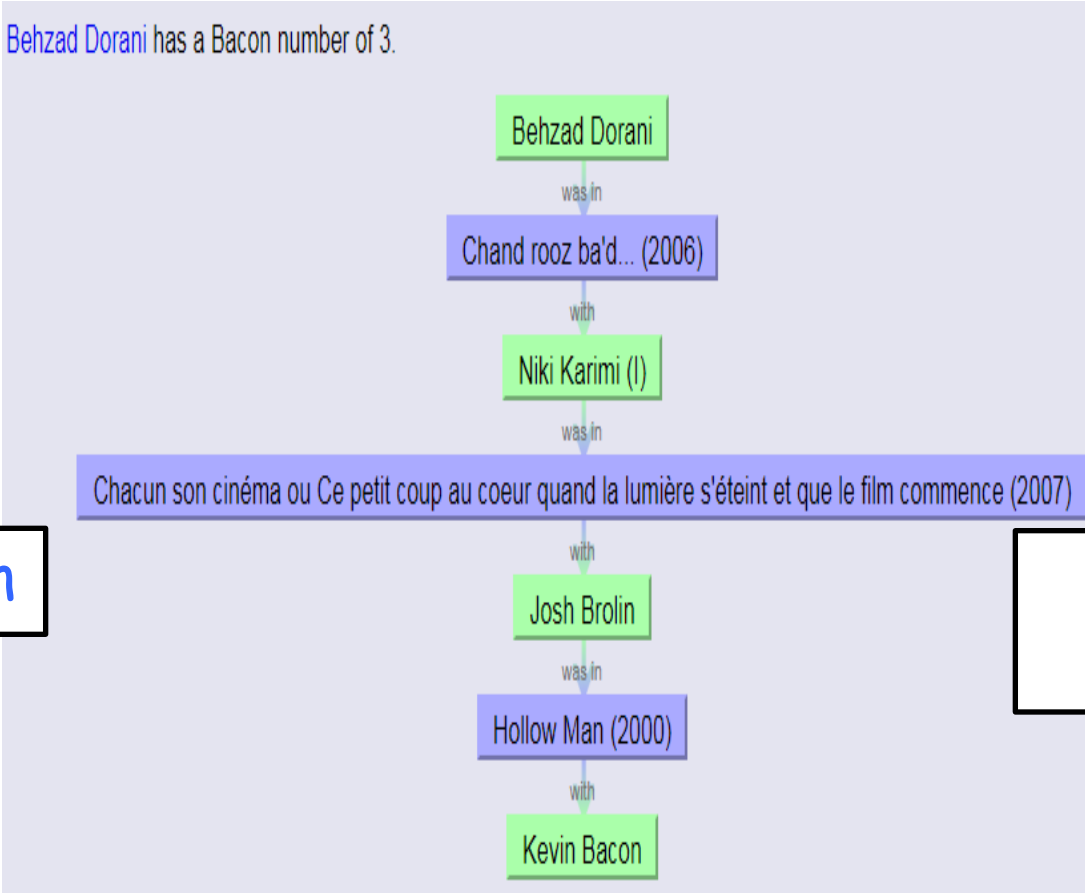
Behzad Dorani has a Bacon number of 3.



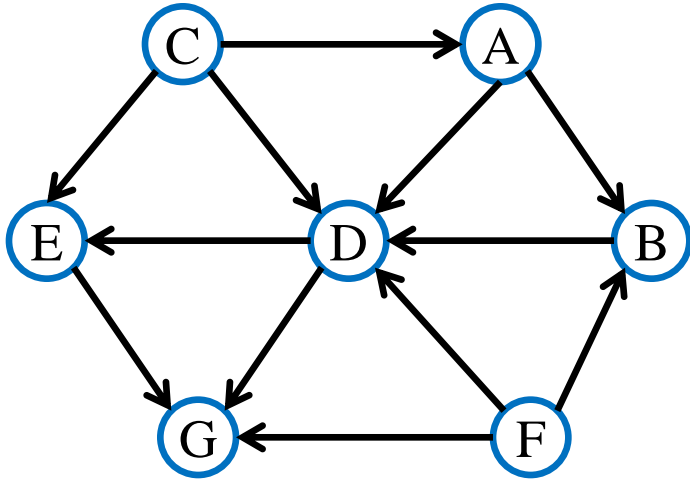
Kevin Bacon



Behzad Dorani



reti "delle dipendenze"

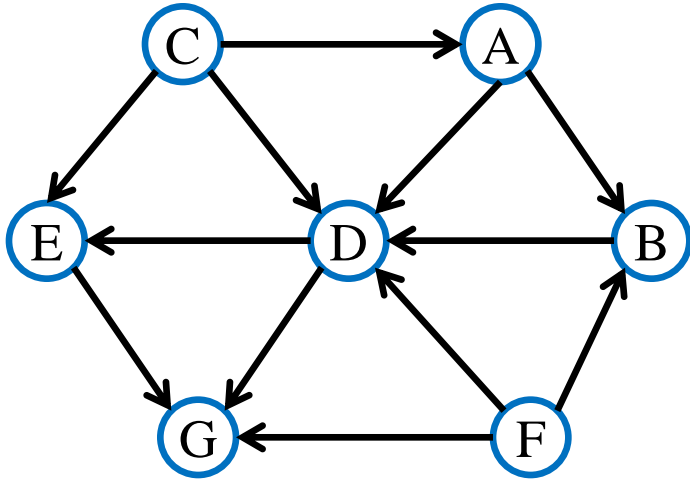


nodi: compiti da svolgere
arco (u,v) : u deve essere
eseguito prima di v

esempi:

- esami e propedeuticità
- moduli software di un progetto e dipendenze
- ...

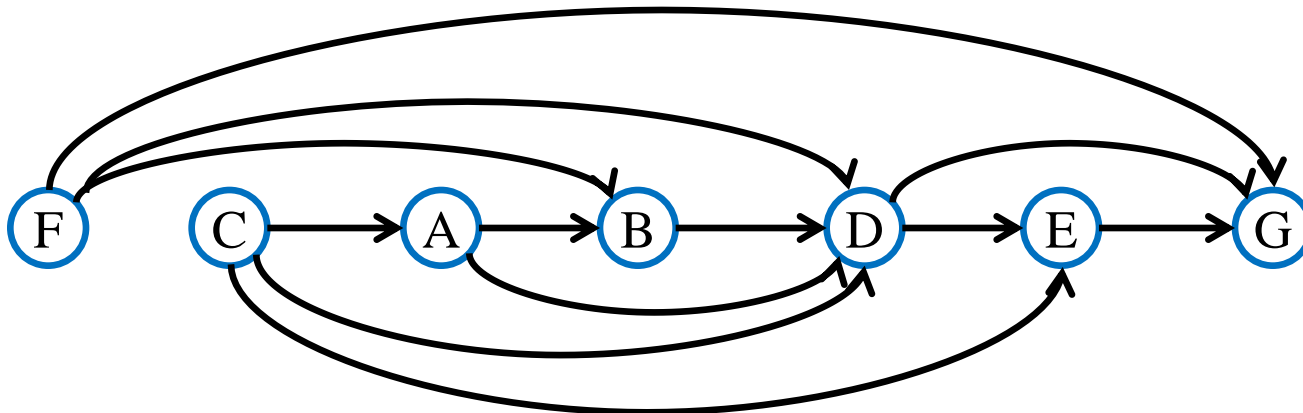
reti "delle dipendenze"



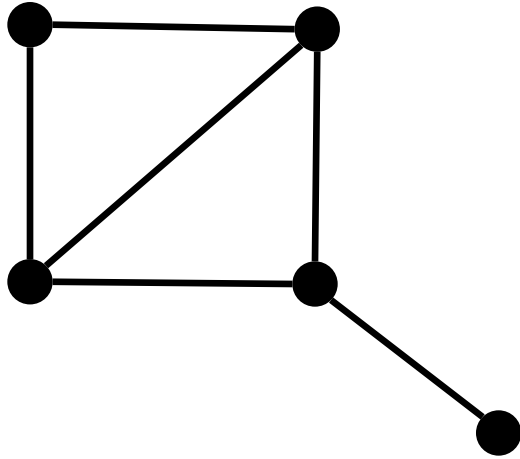
nodi: compiti da svolgere
arco (u,v) : u deve essere
eseguito prima di v

problema:

trovare un ordine in cui eseguire i compiti in modo da
rispettare le dipendenze



reti "delle dipendenze"

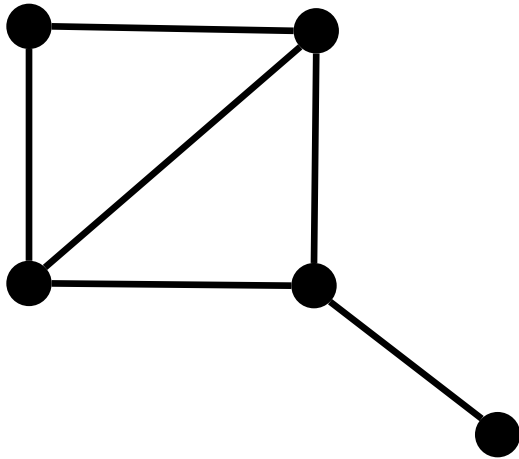


nodi: compiti da svolgere
arco (u,v) : u e v non possono
essere svolti insieme

esempio:

- esami e vincoli
- certi esami non possono essere svolti lo stesso giorno (stesso anno, usano la stessa aula, ecc.)

reti "delle dipendenze"



nodi: compiti da svolgere

arco (u,v) : u e v non possono essere svolti insieme

problemi:

-trovare max #di compiti eseguibili

-trovare min #di "gruppi" di compiti,
t.c. compiti dello stesso gruppo
possono essere eseguiti insieme

massimo insieme indipendente

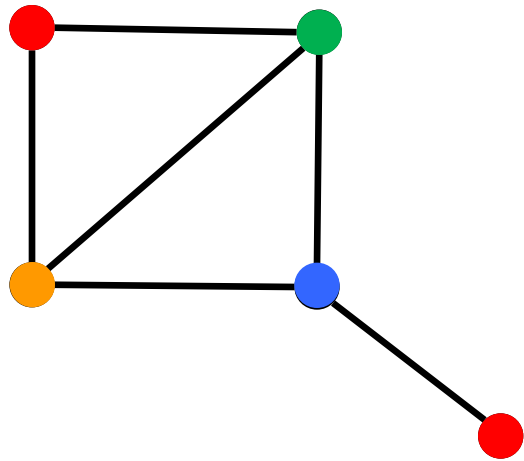
trovare l'insieme X di **nodi** di cardinalità massima tale che per ogni u,v in X , u e v non sono **adiacenti**

colorazione di un grafo

colorare i **nodi** del grafo risultante usando il minimo numero χ di colori in modo che due nodi **adiacenti** non abbiano lo stesso colore

χ : numero cromatico

un esempio



$C_1 =$ ●

$C_2 =$ ●

$C_3 =$ ●

$C_4 =$ ●

$C_5 =$ ●

giorni disponibili:

mercoledì

giovedì

venerdì

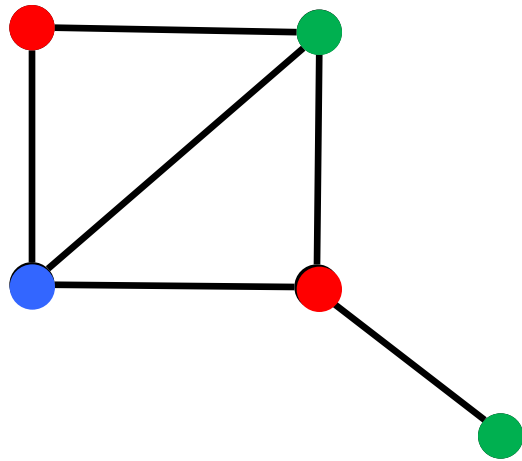
sabato

domenica

possiamo fare
meglio?

possiamo usare
3 colori?

un esempio



$C_1 =$ ●

$C_2 =$ ●

$C_3 =$ ●

$C_4 =$ ●

$C_5 =$ ●

giorni disponibili:

mercoledì

giovedì

venerdì

sabato

domenica

$$\chi(G) = 3$$

possiamo usare 2
colori?

..no: ogni ciclo da tre ha
bisogno di almeno tre
colori!

Esercizio

Dire quali delle seguenti figure possono essere disegnate senza staccare la penna dal foglio (e senza ripassare più volte sulla stessa linea). Motivare la risposta.

