ASD - Esercitazione 22/05/2017
Network Flow

Elementi di Logistica. Siamo nel 1939 e Charlie Chaplin ha invaso una nazione confinante: la Bolonia. Le truppe di Chaplin sono penetrate nella nazione e ora c'é il problema di mandare rifornimenti ai soldati (munizioni, cibo, ...). Chaplin ha una mappa della Bolonia costituita da un insieme R di regioni e sa che tra due regioni i ed j adiacenti possono passare da i a j una quantità $s_{i,j}$ di rifornimenti (si noti che in generale $s_{i,j} \neq s_{j,i}$). I rifornimenti possono partire da un sottoinsieme $S \subset R$ di regioni che sono in grado di produrne in quantità illimitata. Per motivi logistici, comunque, in ogni regione $i \in R$ possono transitare al più m_i rifornimenti totali. Per vincere la guerra Chaplin deve rifornire un sottoinsieme strategico di regioni $R' \subset R$, dove ogni regione $j \in R'$ ha bisogno di h_j rifornimenti. Progettare un algoritmo che determini se Chaplin riuscirà a vincere la guerra. **Una domanda bonus:** qualora Chaplin non riuscisse a vincere la guerra, il generale ha ancora un asso nella manica: può infatti paracadutare c rifornimenti su una regione a sua scelta. Dare un algoritmo che decide se questa nuova possibilità strategica è sufficiente a fargli vincere la guerra.

Soluzione. Una istanza di un problema di flusso è definita da un grafo diretto pesato, da una sorgente e da una destinazione. Per risolvere questo esercizio utilizzando un algoritmo che trova il flusso massimo dobbiamo sicuramente prima costruire una istanza del problema di flusso a partire dalla traccia dell'esercizio:

Il grafo. Considerare il grafo $G(R \cup \{s,t\}, E)$ (dove quindi l'insieme dei nodi equivale all'insieme delle regioni più un nodo sorgente s e un nodo destinazione t) dove per ogni coppia ordinata di regiorni i, j abbiamo che l'arco (i, j) ha peso $s_{i,j}$ se le regioni sono adiacenti, 0 altrimenti.

Vincolo di capacità sui nodi. Abbiamo il vincolo che attraverso ogni nodo i possono passare solo m_i rifornimenti. Una istanza di un problema di flusso non ha capacità sui nodi, ma solamente sugli archi quindi è necessario prendere ogni nodo $i \in R$ e duplicarlo in una coppia di nodi i_{in} e i_{out} e aggiungiamo un arco (i_{in}, i_{out}) di capacità m_i. Ogni arco che entrava in i ora entrerà in i_{in} e ogni arco che usciva da i ora uscirà da i_{out}.

Sorgenti multiple. Il sottoinsieme di regioni S rappresentano le multiple sorgenti del nostro problema di flusso, che riconduciamo ad un'unica sorgente nella classica maniera: colleghiamo la nostra (unica) sorgente s ad ogni nodo $i \in S$ (i_{in}) con un arco diretto di peso infinito.

Destinazioni multiple e taglio da saturare. Il sottoinsieme di regioni R' rappresentano le multiple destinazioni che gestiamo in maniera analoga: ogni regione $j \in R'$ (j_{out}) viene collegata all'unica destinazione t. Il peso dell'arco (j, t) ha peso h_j. Questo è il taglio che stiamo cercando di saturare perchè se da ognuno di questi archi passasse un flusso uguale alla capacità questo significa che siamo in grado di rifornire tutte le regioni strategiche con il giusto numero di rifornimenti. Quindi siamo in grado di vincere la guerra se e solo se, sia f un flusso massimo, allora $v(f) = \sum_{j \in R'} h_j$.

Domanda Bonus. Supponiamo di indovinare la regione $r \in R$ dove paracadutare c rifornimenti. Nella nostra istanza questo viene rappresentato collegando la sorgente s con la regione r con un arco di peso c. A quel punto possiamo eseguire nuovamente l'algoritmo di flusso scelto e vedere se $v(f) = \sum_{j \in R'} h_j$. Poichè non conosciamo quale sia la regione giusta, possiamo ripetere questo approccio per tutti gli $r \in R$ chiedendoci se esiste un r per cui la condizione sul flusso è soddisfatta.

Economia 1. Siete il Ministro del Tesoro e il vostro lavoro consiste nel conferire il premio annuale La Banca Più Utile. Sia B l'insieme delle banche, I l'insieme delle imprese e A l'insieme degli appalti. Ogni anno la banca b finanzia l'impresa i con $q_{b,i} \in \mathbb{Z}$ euro. Ogni appalto a è vinto da $S_a \subset I$ imprese. Affinché l'appalto a sia completato serve almeno una impresa vincitrice ci investa 1 euro. Il premio viene assegnato a quella banca che, se smettesse di concedere i suoi finanziamenti alle imprese, risulterebbe in un decremento massimo di appalti completati. Progettare un algoritmo che trova la banca vincitrice e discuterne la complessità.

Soluzione. *Il grafo.* Costruiamo un grafo con una sorgente s, una destinazione t, un nodo per ogni banca in B, un nodo per ogni impresa in I e un nodo per ogni appalto in A. Colleghiamo s con tutti i nodi in B con un arco diretto di peso infinito. Colleghiamo ogni coppia $b, i \in B \times A$ con un arco diretto (b, i) di peso $q_{b,i}$. Colleghiamo ogni nodo $i \in I$ con un arco diretto a $a \in A$ di peso infinito se l'appalto a è vinto dall'impresa i. Ogni appalto viene collegato alla destinazione t con un arco di peso 1. E' facile vedere che il numero di numero di appalti massimi completati equivale al valore del flusso massimo $v(f)$ (proprio perchè le capacità sono intere e quindi anche il valore dei flussi sui singoli archi saranno interi).

L'algoritmo. A questo punto per ognuna delle B banche disconnettiamo la banca b dalla sorgente e calcoliamo il valore del flusso $v(f)_b$. La banca $b \in B$ per cui il valore del flusso $v(f)_b$ è minimo è La Banca Più Utile. Il costo computazionale dell'algoritmo proposto è $|B|$ volte la chiamata ad un algoritmo di massimo flusso. Sia V l'insieme dei nodi del grafo ($V = B \cup I \cup A \cup \{s, t\}$), poichè esiste un taglio di peso $|A|$ (quello tra A e t) allora l'algoritmo migliore è l'Algoritmo di Ford-Fulkerson con complessità $|AV| < |V^2|$ (in totale il costo è dunque $|BV^2| < |V^3|$).

Economia 2. Consideriamo:

- un grafo $G = (V, E)$ con archi di capacità $c : E \mapsto Z^+$
- funzione $b : V \mapsto Z$, che possiamo interpretare come offerta ($b(v) > 0$) o domanda ($b(v) < 0$) di una determinata merce, e per la quale assumiamo $\sum_{v \in V} b(v) = 0$, ovvero c'é equilibrio complessivo tra domanda e offerta.

Ci chiediamo se esiste una modalità di trasferimento della merce attraverso gli archi del grafo che soddisfi per ogni arco il limite posto dalla sua capacità e inoltre faccia si che avvenga un trasferimento perfetto della merce, che soddisfi tutta la domanda. Formalmente ci chiediamo se esiste un flusso f tale che:

- per ogni nodo $v \in V$, $\sum_{e\in O(v)} f(e) - \sum_{e\in I(v)} f(e) = b(v)$
- per ogni $e \in E$, $0 \leq f(e) \leq c(e)$.

Soluzione. Dobbiamo ricondurre un problema di flusso (definito diversamente da come fatto a lezione) ad un problema di flusso classico (con sorgente,destinazione ecc ...). Per fare questo a partire dal grafo G costruiremo un grafo G'. Nota che dobbiamo distinguere il flusso f definito nel testo dal flusso massimo f' (che invece rappresenta il flusso definito a lezione) trovato facendo girare un algoritmo di flusso massimo su G'.

Grafo diretto. Per prima cosa bisogna rendere diretto il grafo. Semplicemente ogni arco $e = (u, v) \in E$ di capacità $c(e)$ viene sostituito da un arco diretto (u, v) e da un arco diretto (v, u) di capacità $c(e)$.

Sorgenti e destinazioni multiple. Dividiamo i nodi tra quelli con il valore $b(v)$ positivo e quelli con il $b(v)$ negativo e aggiungiamo un nodo sorgente s e un nodo destinazione t. Ogni nodo del primo gruppo viene collegato alla sorgente con arco di valore $b(v)$, ogni nodo del secondo viene collegato alla destinazione con un arco di valore $|b(v)|$.

Teorema. Otteniamo un "trasferimento perfetto della merce" f **se e solo se** il valore del flusso massimo f' su questo grafo G' è uguale al taglio tra s e il resto del grafo: $v(f') = \sum_{v:b(v)>0} b(v)$.

Dimostrazione (se). Otteniamo un "trasferimento perfetto della merce" f **se** il valore del flusso massimo f' su questo grafo G' è uguale al taglio tra s e il resto del grafo: $v(f') = \sum_{v:b(v)>0} b(v)$.

Supponiamo di avere un flusso massimo f' che soddisfa la prorietà sopra. Considera un nodo v tale che $b(v) > 0$. Costuiamo un flusso f a partire da f' in modo che per ogni $e \in E$ allora $f(e) = f'(e)$ (quindi se $e \in E$, $0 \leq f'(e) \leq c(e)$ allora $e \in E$, $0 \leq f(e) \leq c(e)$). Poichè f' è un flusso ammissibile allora $\sum_{e\in O(v)} f'(e) - \sum_{e\in I(v)} f'(e) = 0$. Però in G non esiste s e dunque non esiste neppure il flusso da s a v (di valore $b(v)$) quindi se consideriamo il nuovo flusso f abbiamo che $\sum_{e\in O(v)} f(e) - \sum_{e\in I(v)} f(e) = \sum_{e\in O(v)} f'(e) - \sum_{e\in I(v)} f'(e) + b(v) = b(v)$. Analogo ragionamento può essere fatto per i nodi tali che $b(v) < 0$. $\square$

Dimostrazione (solo se). Otteniamo un "trasferimento perfetto della merce" f **solo se** il valore del flusso massimo f' su questo grafo G' è uguale al taglio tra s e il resto del grafo: $v(f') = \sum_{v:b(v)>0} b(v)$.

Supponiamo di avere un flusso f tale che $\forall v \in V$, $\sum_{e\in O(v)} f(e) - \sum_{e\in I(v)} f(e) = b(v)$. Definiamo $f'(e) = f(e)$. Consideriamo un v tale che $b(v) > 0$. E' immediato vedere che costruendo G' come sopra allora dalla sorgente s a v può passare $b(v)$ di flusso e quindi $\sum_{e\in O(v)} f'(e) - \sum_{e\in I(v)} f'(e) = 0$. Analogo ragionamento può essere fatto per i nodi tali che $b(v) < 0$. $\square$