

Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 6 Alberi di ricerca

Dizionari

- Gli alberi di ricerca sono usati per realizzare in modo efficiente il tipo di dato dizionario

tipo Dizionario:

dati: un insieme S di coppie (*elem*, *chiave*)

operazioni:

insert(*elem* e , *chiave* k)

aggiunge a S una nuova coppia (e, k)

delete(*elem* e)

cancella da S l'elemento e

search(*chiave* k) \rightarrow *elem*

se la chiave k è presente in S restituisce un elemento e ad essa associato, e null altrimenti

Come implementare efficientemente un dizionario?

E' possibile garantire che tutte le operazioni su un dizionario di n elementi abbiano tempo $O(\log n)$.

Due idee:

Definire un albero (binario) tale che ogni operazione richiede tempo $O(\text{altezza albero})$

**alberi binari
di ricerca**

fare in modo che l'altezza dell'albero sia sempre $O(\log n)$

alberi AVL



**Alberi binari di ricerca
(BST = binary search tree)**

Definizione

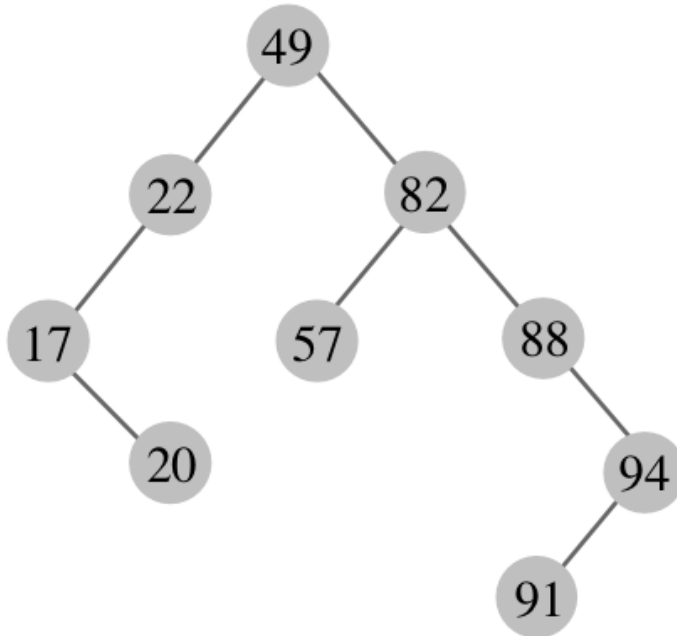
Albero binario che soddisfa le seguenti proprietà

- ogni nodo v contiene un elemento $\text{elem}(v)$ cui è associata una chiave $\text{chiave}(v)$ presa da un dominio totalmente ordinato.

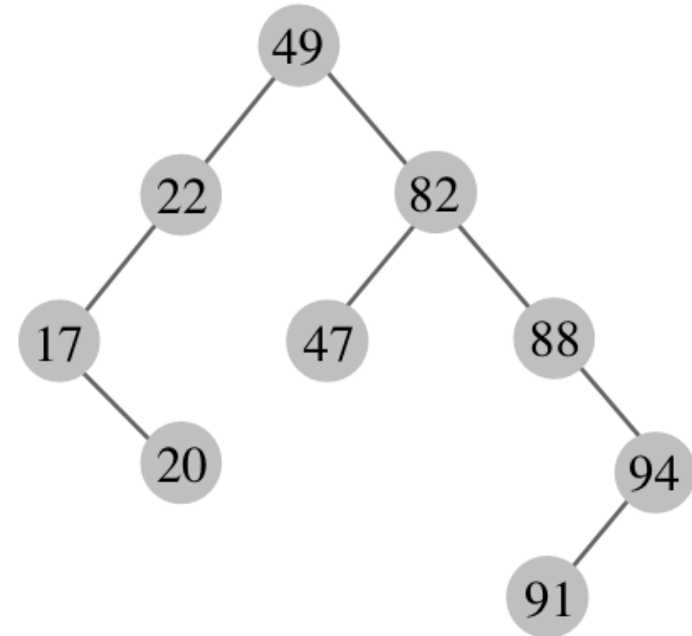
Per ogni nodo v vale che:

- le chiavi nel sottoalbero sinistro di v sono $\leq \text{chiave}(v)$
- le chiavi nel sottoalbero destro di v sono $> \text{chiave}(v)$

Esempi

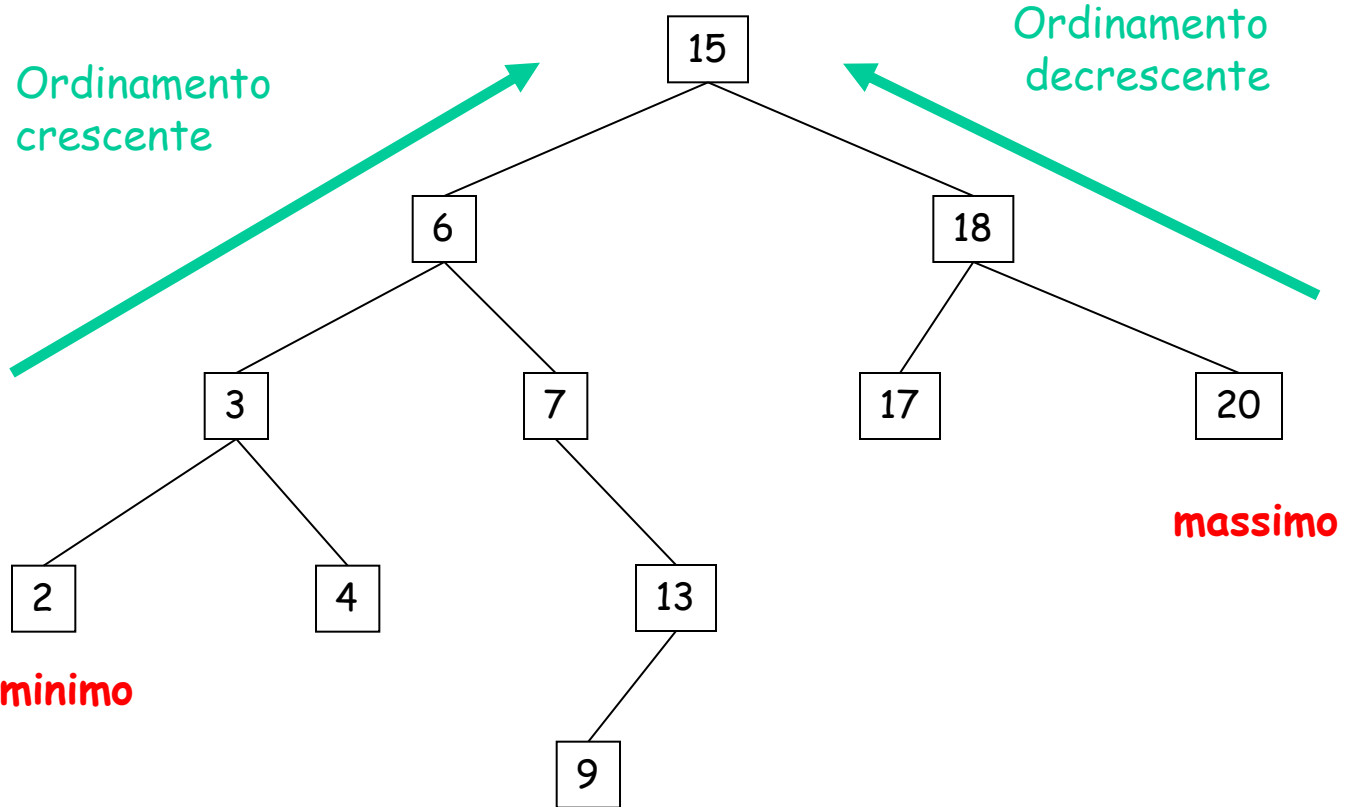


Albero binario
di ricerca

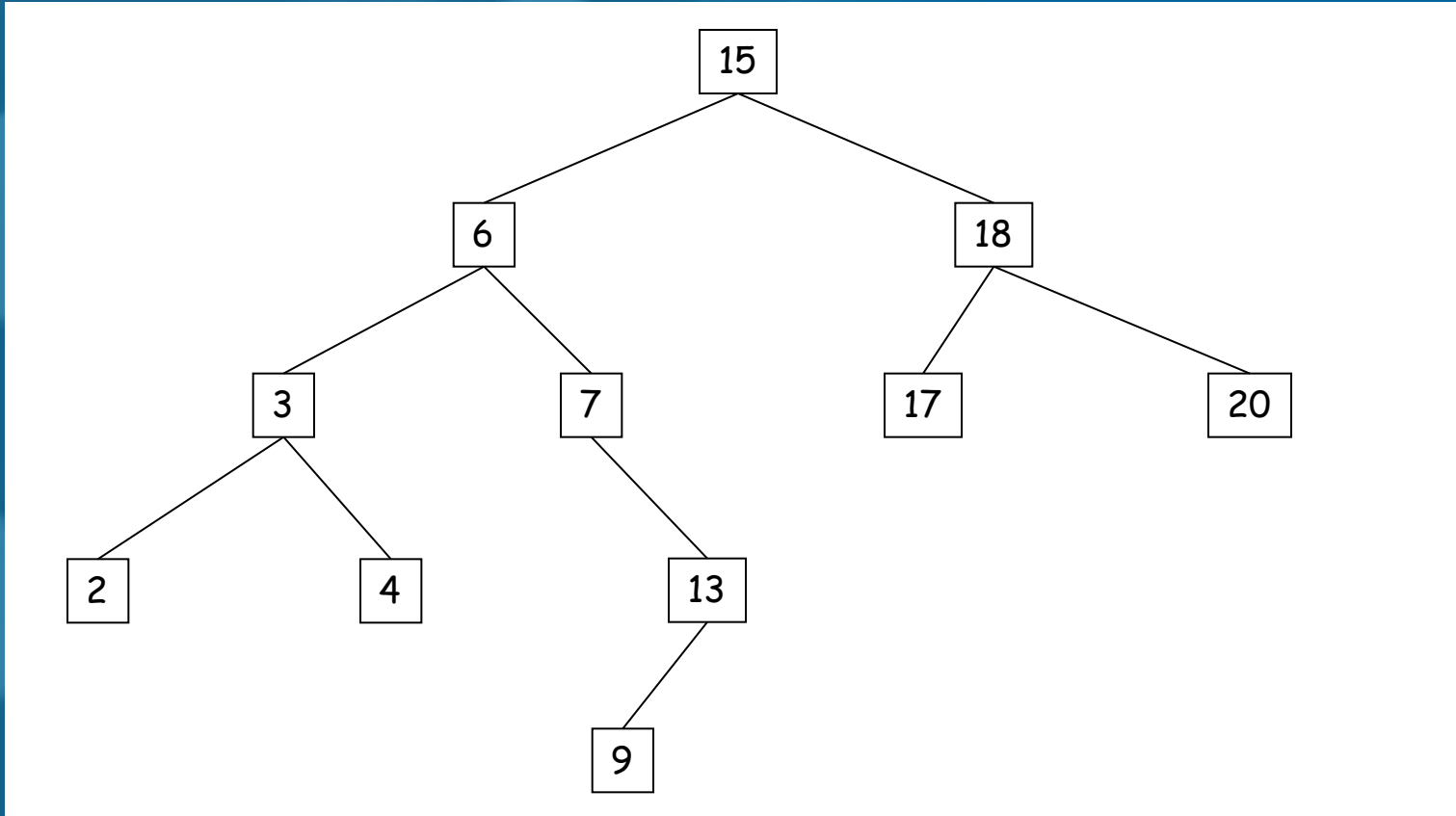


Albero binario
non di ricerca

...ancora un esempio...



...che succede se visitiamo un
BST in ordine simmetrico?



2 3 4 6 7 9 13 15 17 18 20

visito i nodi in ordine crescente di chiave!

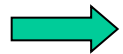
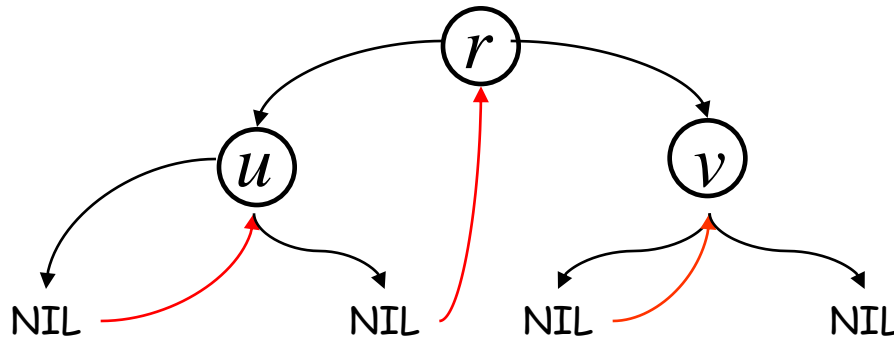
Verifica di correttezza –

Indichiamo con h l'altezza dell'albero.

Vogliamo mostrare che la visita in ordine simmetrico restituisce la sequenza ordinata

Per induzione sull'altezza dell'ABR: $h=1$

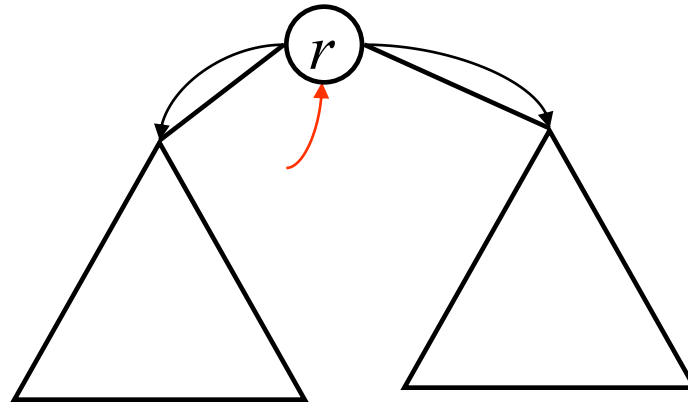
(mostriamolo senza perdita di generalità quando l'albero è completo.)



$$\text{chiave}(u) \leq \text{chiave}(r) \leq \text{chiave}(v)$$

Verifica correttezza (continua ...)

h = generico (ipotizzo che la procedura sia corretta per $h-1$)



Albero di altezza $\leq h-1$.
Tutti i suoi elementi sono
minori o uguali della
radice

Albero di altezza $\leq h-1$.
Tutti i suoi elementi sono
maggiori o uguali della
radice

...implementare le operazioni del
dizionario (**search**, **insert** e **delete**) su
un BST

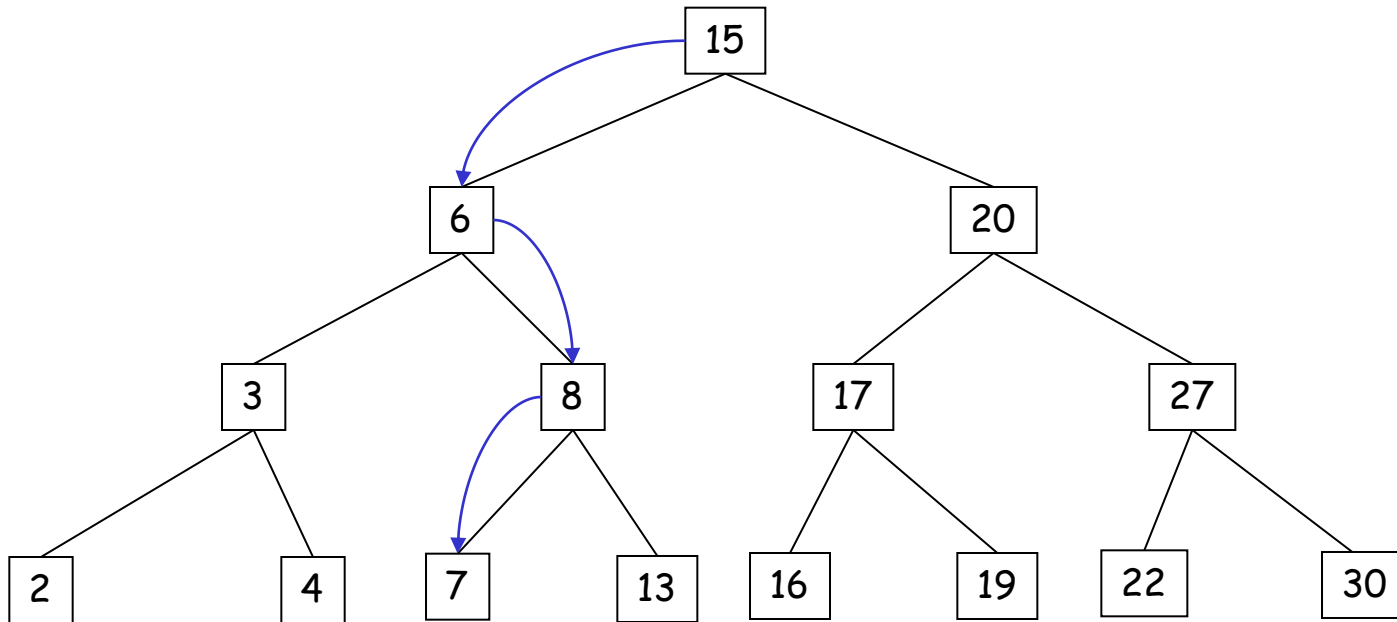
search(chiave k) \rightarrow elem

Traccia un cammino nell'albero partendo dalla radice: su ogni nodo, usa la proprietà di ricerca per decidere se proseguire nel sottoalbero sinistro o destro

algoritmo search(*chiave* k) \rightarrow elem

1. $v \leftarrow$ radice di T
2. **while** ($v \neq \text{null}$) **do**
3. **if** ($k = \text{chiave}(v)$) **then return** elem(v)
4. **else if** ($k < \text{chiave}(v)$) **then** $v \leftarrow$ figlio sinistro di v
5. **else** $v \leftarrow$ figlio destro di v
6. **return null**

search(7)

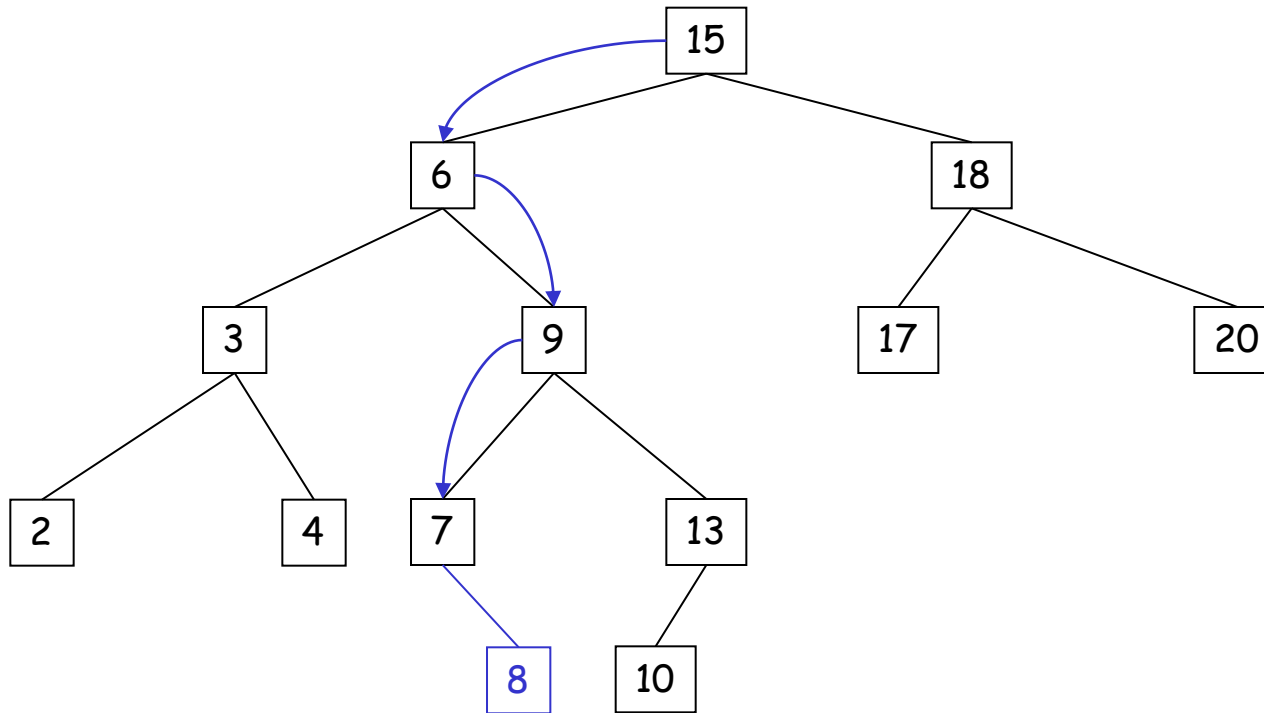


insert(elem e, chiave k)

Idea: aggiunge la nuova chiave come nodo foglia;
per capire dove mettere la foglia simula una ricerca con la
chiave da inserire

1. Crea un nuovo nodo u con $\text{elem}=e$ e $\text{chiave}=k$
2. Cerca la chiave k nell'albero, identificando così il
nodo v che diventerà padre di u
3. Appendi u come figlio sinistro/destro di v in modo
che sia mantenuta la proprietà di ricerca

insert(e,8)



Se seguo questo schema l'elemento e viene posizionato nella posizione giusta. Infatti, per costruzione, ogni antenato di e si ritrova e nel giusto sottoalbero.

...qualche operazione ausiliaria prima di implementare l'operazione di **delete**:

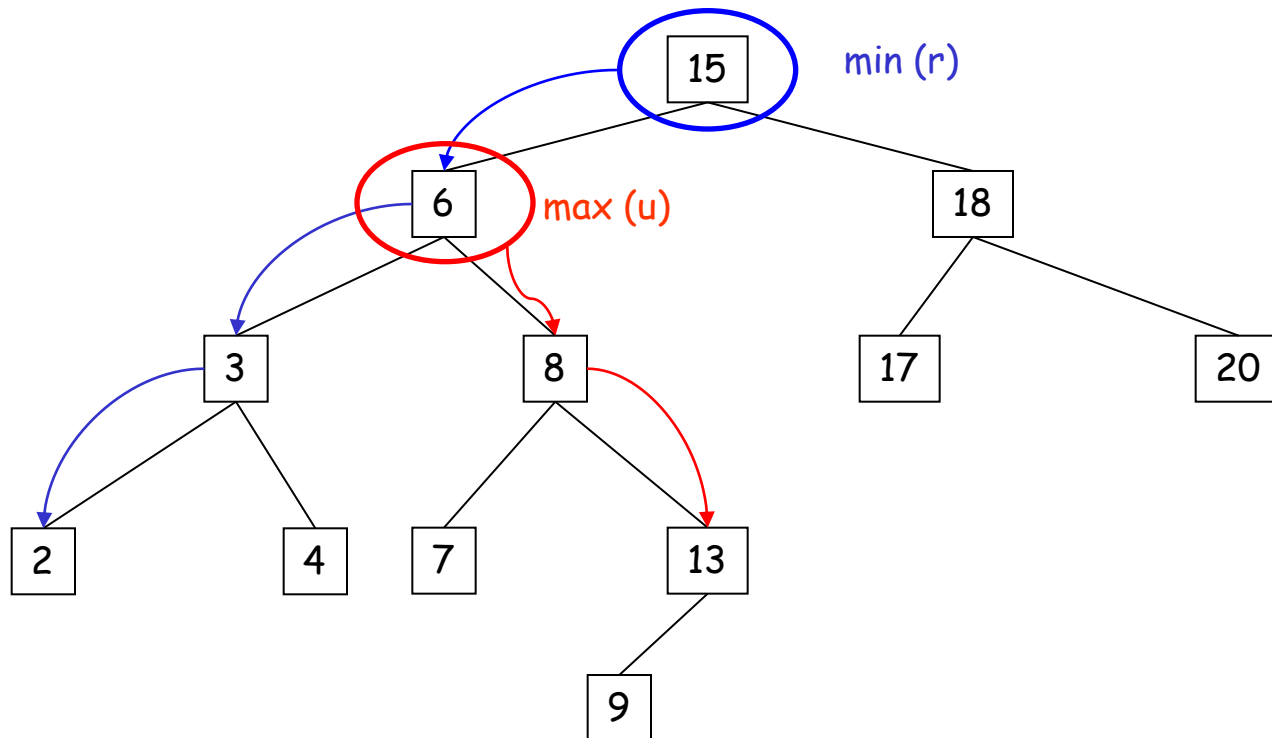
...massimo, minimo, predecessore e successore

Ricerca del massimo

algoritmo $\text{max}(\text{nodo } u) \rightarrow \text{nodo}$

1. $v \leftarrow u$
2. **while** (figlio destro di $v \neq \text{null}$) **do**
3. $v \leftarrow$ figlio destro di v
4. **return** v

Nota: è possibile definire una procedura $\text{min}(\text{nodo } u)$ in maniera del tutto analoga



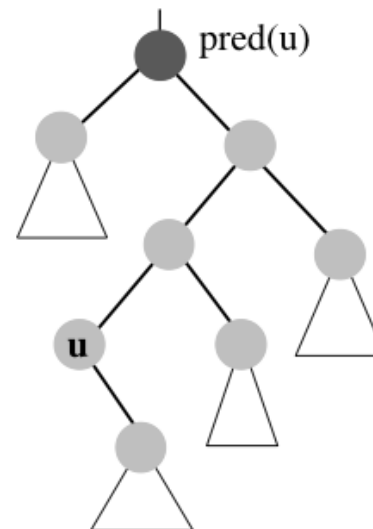
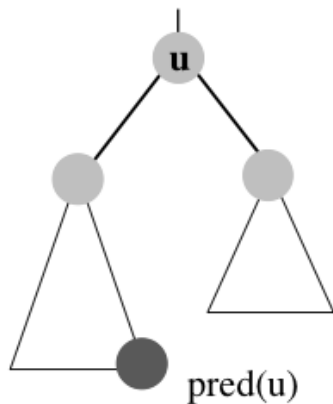
predecessore e successore

- il **predecessore** di un nodo u in un BST è il nodo v nell'albero avente massima chiave \leq chiave(u)
- il **successore** di un nodo u in un BST è il nodo v nell'albero avente minima chiave \geq chiave(u)
- Come trovo il predecessore/successore di un nodo in un BST?

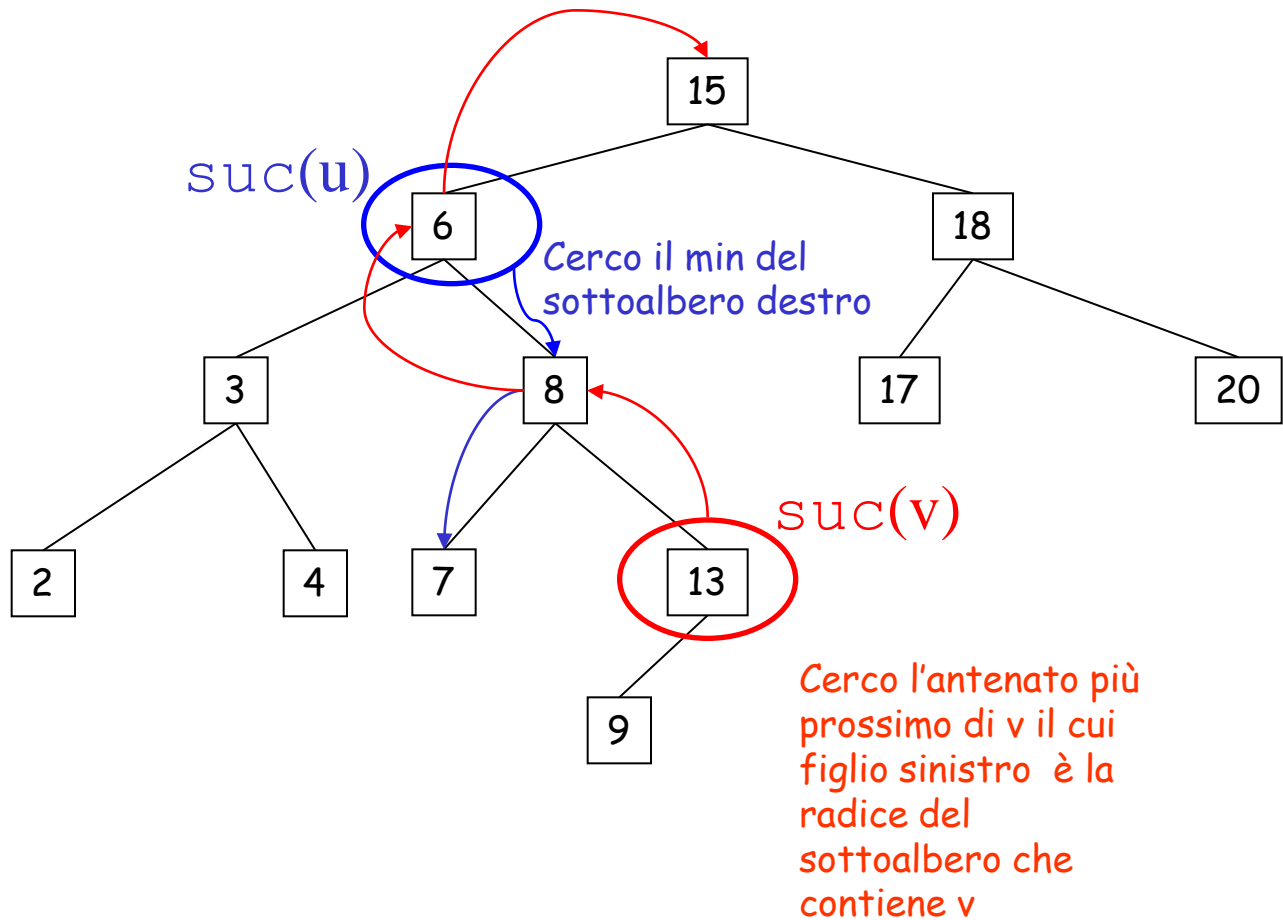
Ricerca del predecessore

algoritmo $\text{pred}(\text{nodo } u) \rightarrow \text{nodo}$

1. **if** (u ha figlio sinistro $\text{sin}(u)$) **then**
2. **return** $\text{max}(\text{sin}(u))$
3. **while** ($\text{parent}(u) \neq \text{null}$ e u è figlio sinistro di suo padre) **do**
4. $u \leftarrow \text{parent}(u)$
5. **return** $\text{parent}(u)$



Nota: la ricerca del **successore** di un nodo è simmetrica

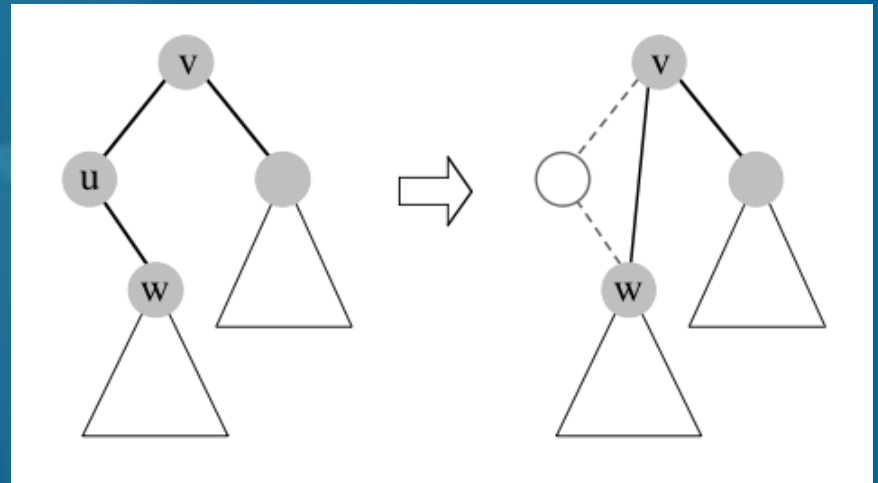


delete(elem e)

Sia u il nodo contenente l'elemento e da cancellare:

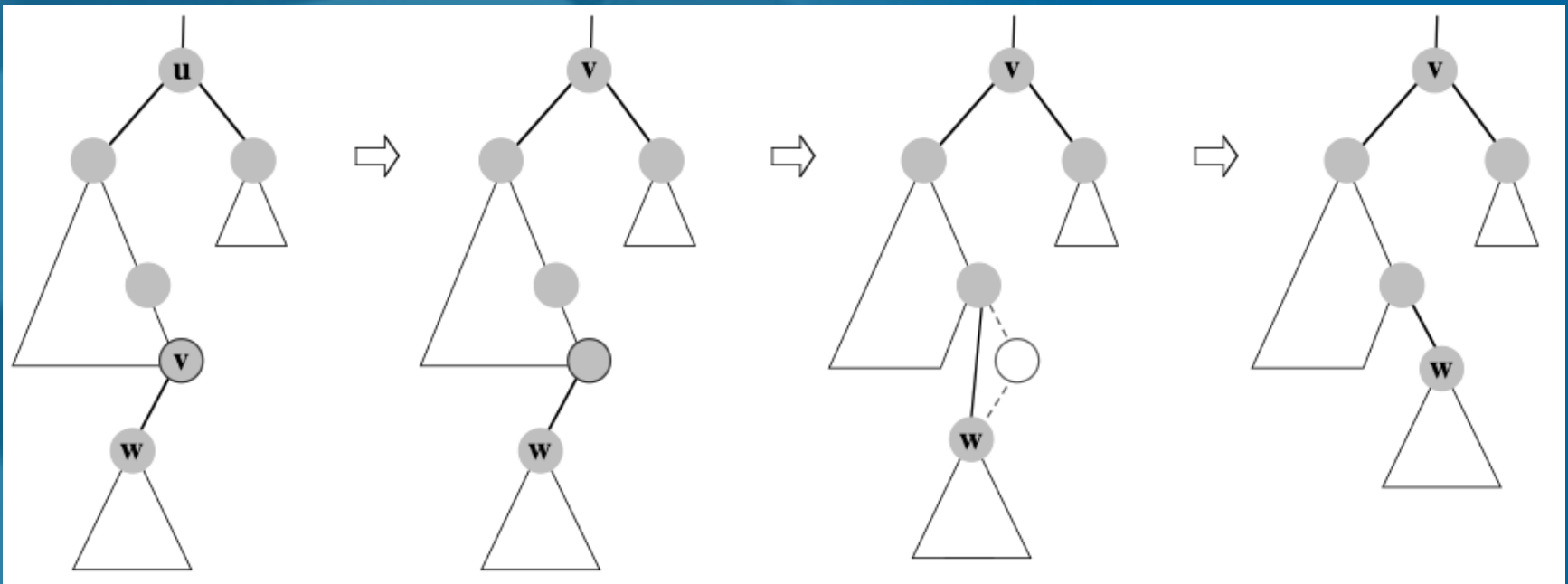
1) u è una foglia: rimuovila

2) u ha un solo figlio:

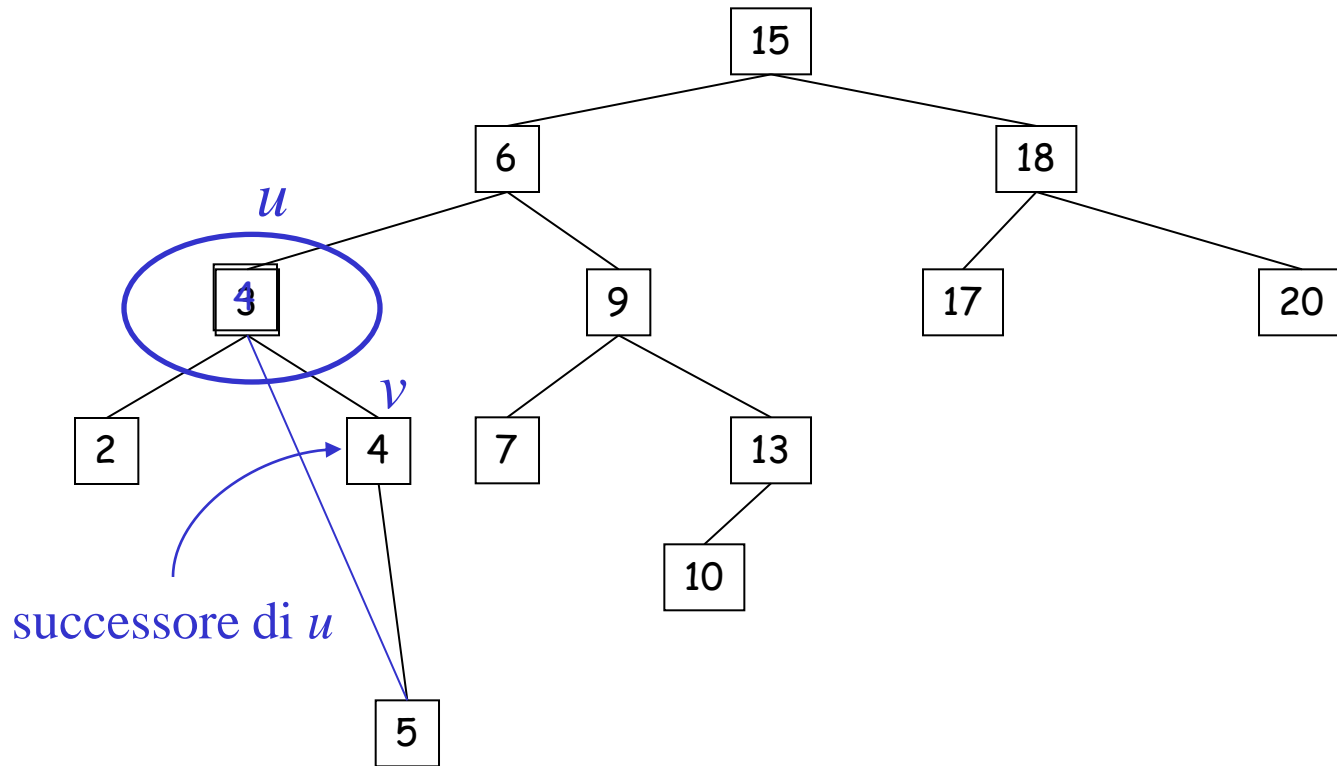


delete(elem e)

3) u ha due figli: sostituisco con il predecessore (o successore) (v) e rimuovi fisicamente il predecessore (o successore) (che ha un solo figlio)



delete (u)

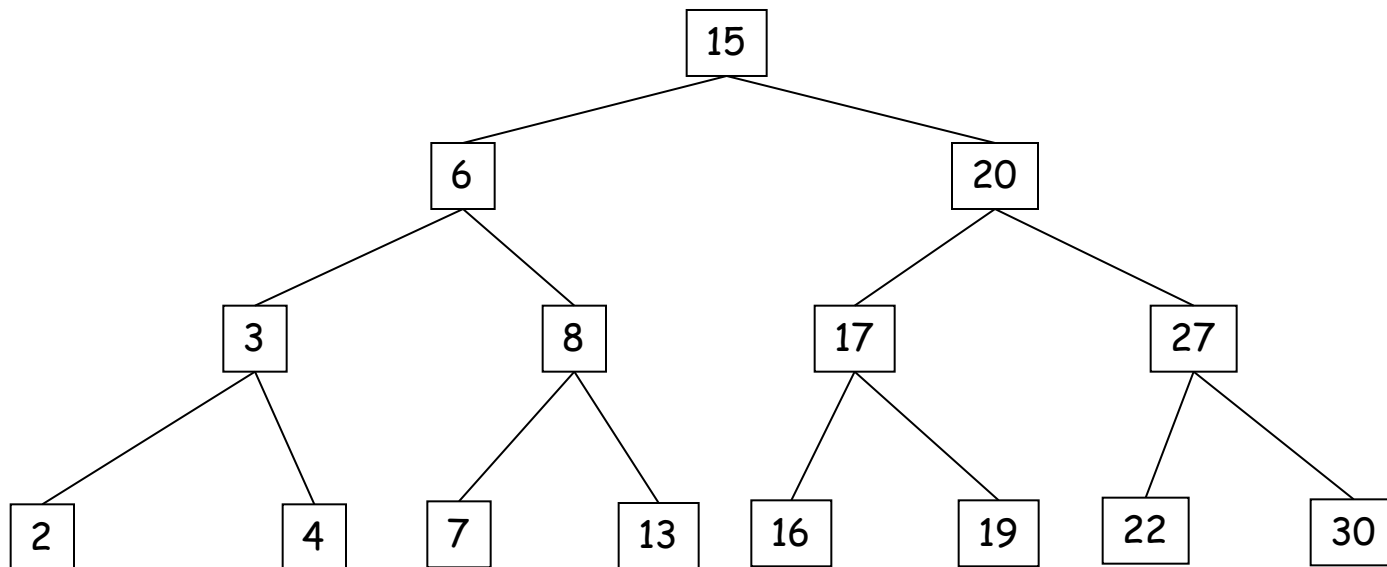


Costo delle operazioni

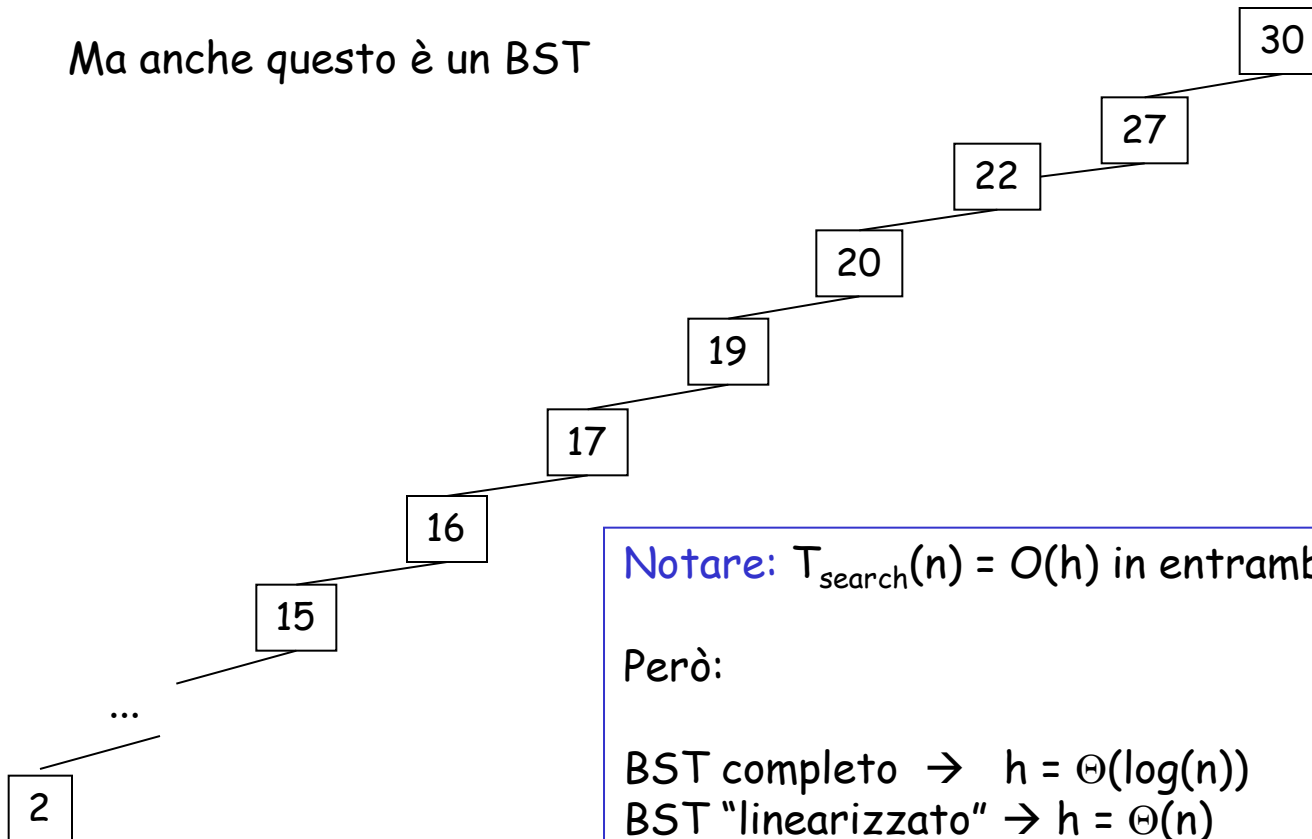
- Tutte le operazioni hanno costo $O(h)$ dove h è l'altezza dell'albero
- $O(n)$ nel caso peggiore (alberi molto sbilanciati e profondi)

...un albero binario di ricerca bilanciato...

$$h=O(\log n)$$



Ma anche questo è un BST



Notare: $T_{\text{search}}(n) = O(h)$ in entrambi i casi

Però:

BST completo $\rightarrow h = \Theta(\log(n))$

BST "linearizzato" $\rightarrow h = \Theta(n)$

Come implementare efficientemente un dizionario?

E' possibile garantire che tutte le operazioni su un dizionario di n elementi abbiano tempo $O(\log n)$.

Due idee:

Definire un albero (binario) tale che ogni operazione richiede tempo $O(\text{altezza albero})$

**alberi binari
di ricerca**

fare in modo che l'altezza dell'albero sia sempre $O(\log n)$

alberi AVL



Alberi AVL
(Adel'son-Vel'skii e Landis, 1962)

Definizioni

Fattore di bilanciamento $\beta(v)$ di un nodo v = altezza del sottoalbero sinistro di v - altezza del sottoalbero destro di v

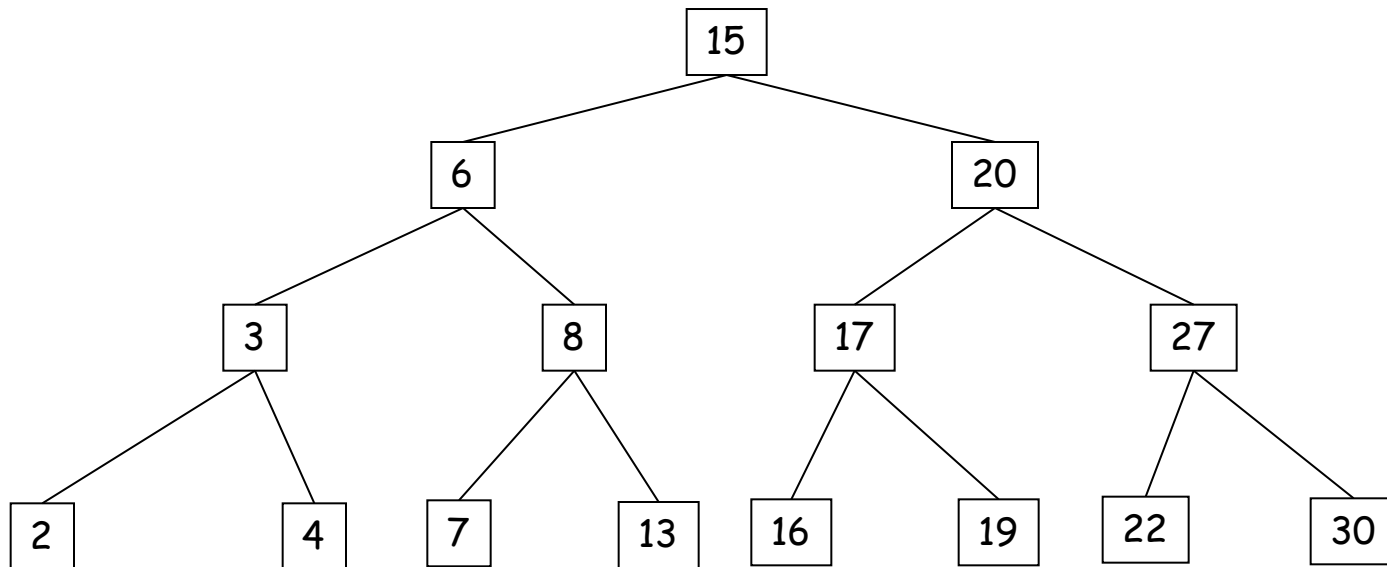
Un albero si dice **bilanciato in altezza** se ogni nodo v ha fattore di bilanciamento in valore assoluto ≤ 1

Alberi AVL = alberi binari di ricerca bilanciati in altezza

Generalmente $\beta(v)$ mantenuto come informazione addizionale nel record relativo a v

...qualche esempio...

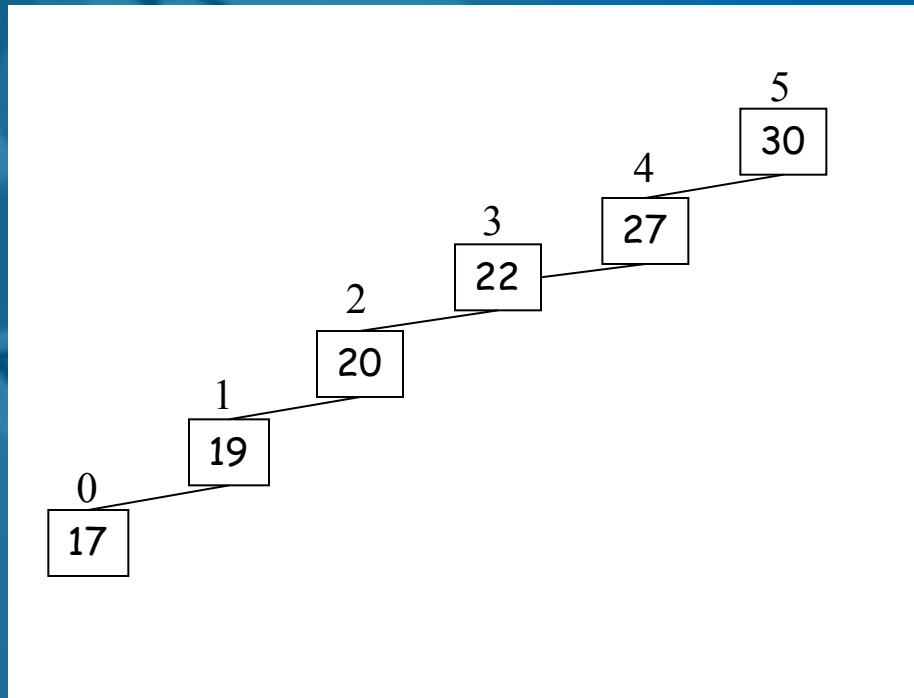
è il seguente albero AVL?



Sì: tutti i nodi hanno fattore di bilanciamento = 0

...qualche esempio...

è il seguente albero AVL?

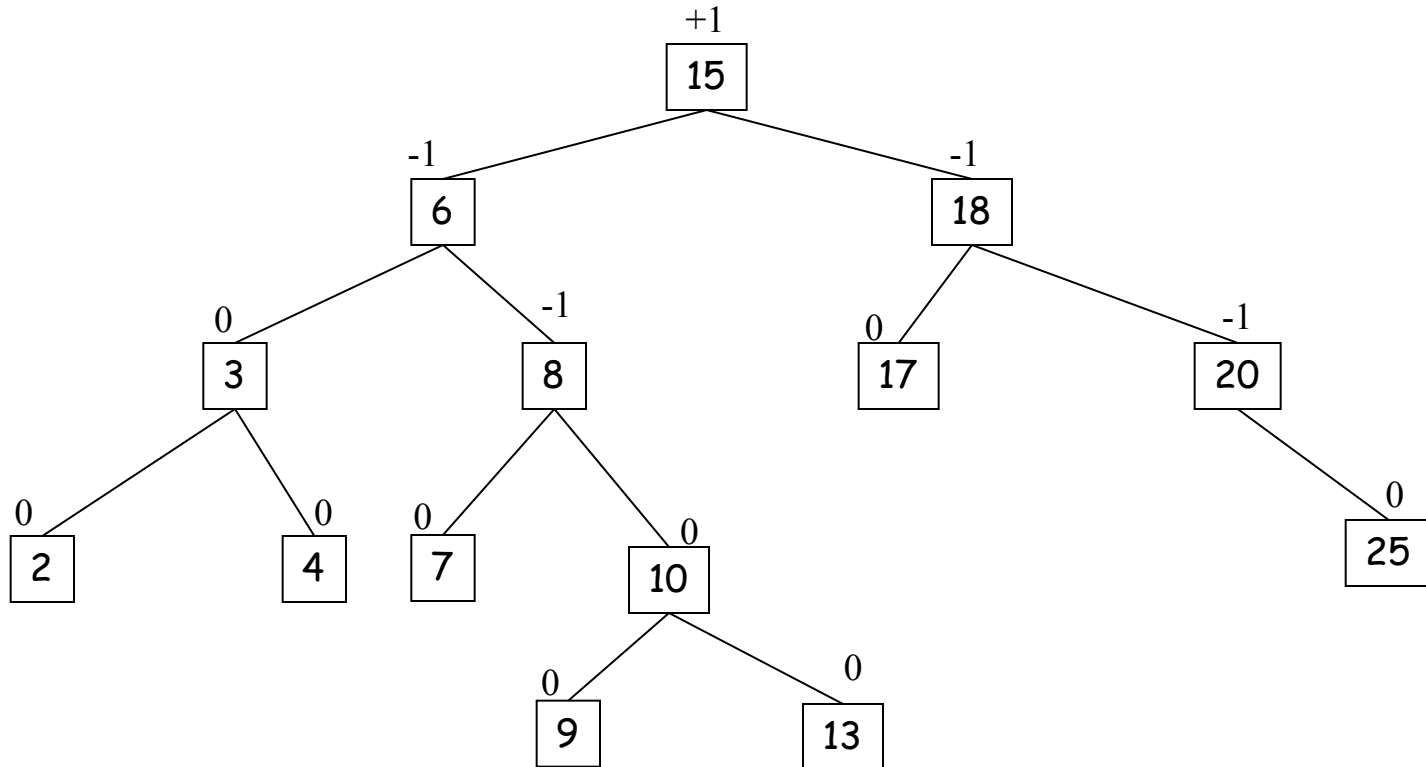


Convenzione:
altezza di un
albero vuoto = -1

NO! Non vale la proprietà sui fattori di bilanciamento!

è il seguente albero AVL?

...qualche esempio...



Sì: proprietà sui fattori di bilanciamento rispettata

Altezza di alberi AVL

Si può dimostrare che **un albero AVL con n nodi ha altezza $O(\log n)$**

Idea della dimostrazione: considerare, tra tutti gli AVL di altezza h , quelli con il minimo numero di nodi n_h (**alberi di Fibonacci**): sono i più sbilanciati!

minimizzare # nodi
fissata l'altezza

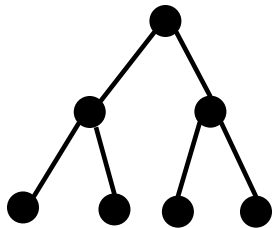
≡

massimizzare altezza
fissato #nodi

Intuizione: se gli alberi di Fibonacci hanno altezza $O(\log n)$, allora gli alberi AVL hanno altezza $O(\log n)$

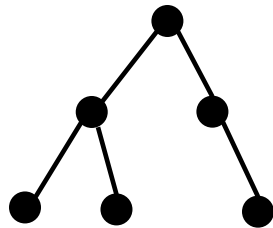
Un esempio: come è fatto un albero di Fibonacci di altezza 2?

così?



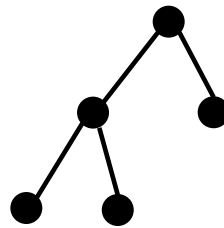
no: troppi
nodi!

così?



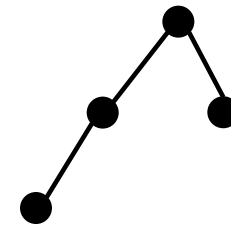
no: troppi
nodi!

così?



no: troppi
nodi!

così?



sì!

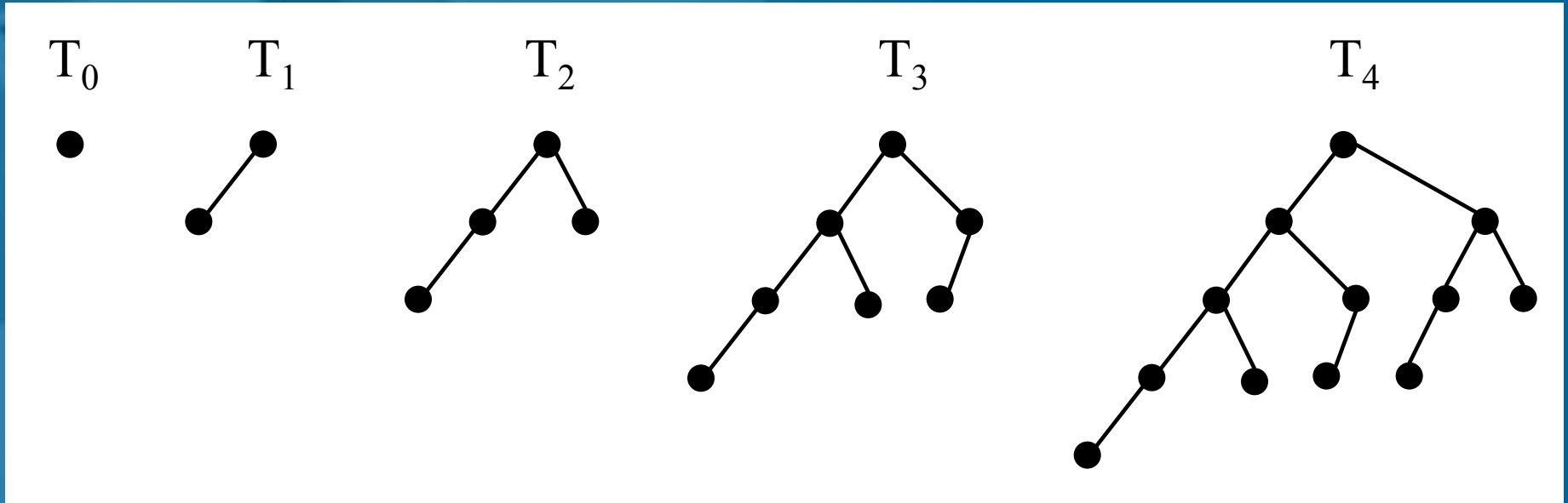
Infatti: se togliamo ancora un nodo, o diventa sbilanciato, o cambia la sua altezza

Nota: ogni nodo (non foglia) ha fattore di bilanciamento pari (in valore assoluto) a 1

...Alberi di Fibonacci per piccoli valori di altezza...

T_i : albero di Fibonacci di altezza i

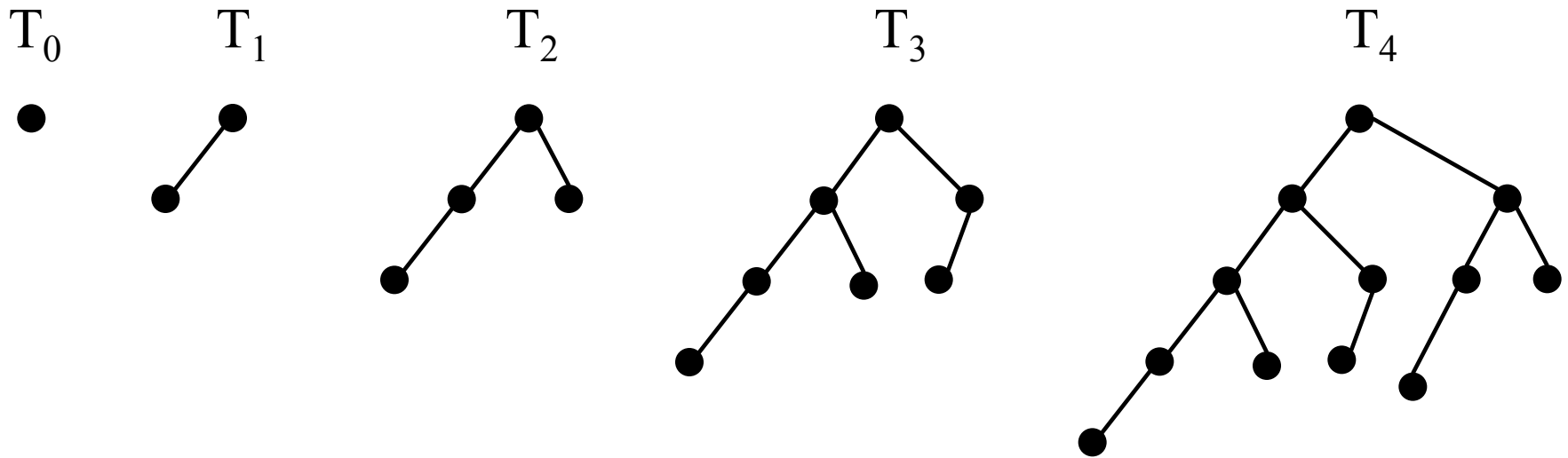
(albero AVL di altezza i con il minimo numero di nodi)



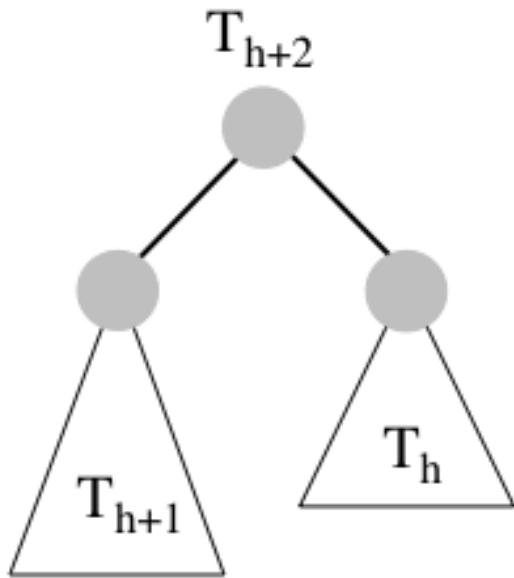
Nota che: se a T_i tolgo un nodo, o diventa sbilanciato, o cambia la sua altezza

Inoltre: ogni nodo (non foglia) ha fattore di bilanciamento pari (in valore assoluto) a 1

intravedete uno schema per generare l' i -esimo albero di Fibonacci a partire dai precedenti?



Lo schema



Lemma

Sia n_h il numero di nodi di T_h .

Risulta $n_h = 1 + n_{h-1} + n_{h-2} = F_{h+3} - 1$

dim

per induzione su h

Corollario

Un albero AVL con n nodi ha altezza $h=O(\log n)$

dim

$$n_h = F_{h+3} - 1 = \Theta(\phi^h)$$



$$h = \Theta(\log n_h) = O(\log n)$$

corollario segue da $n_h \leq n$

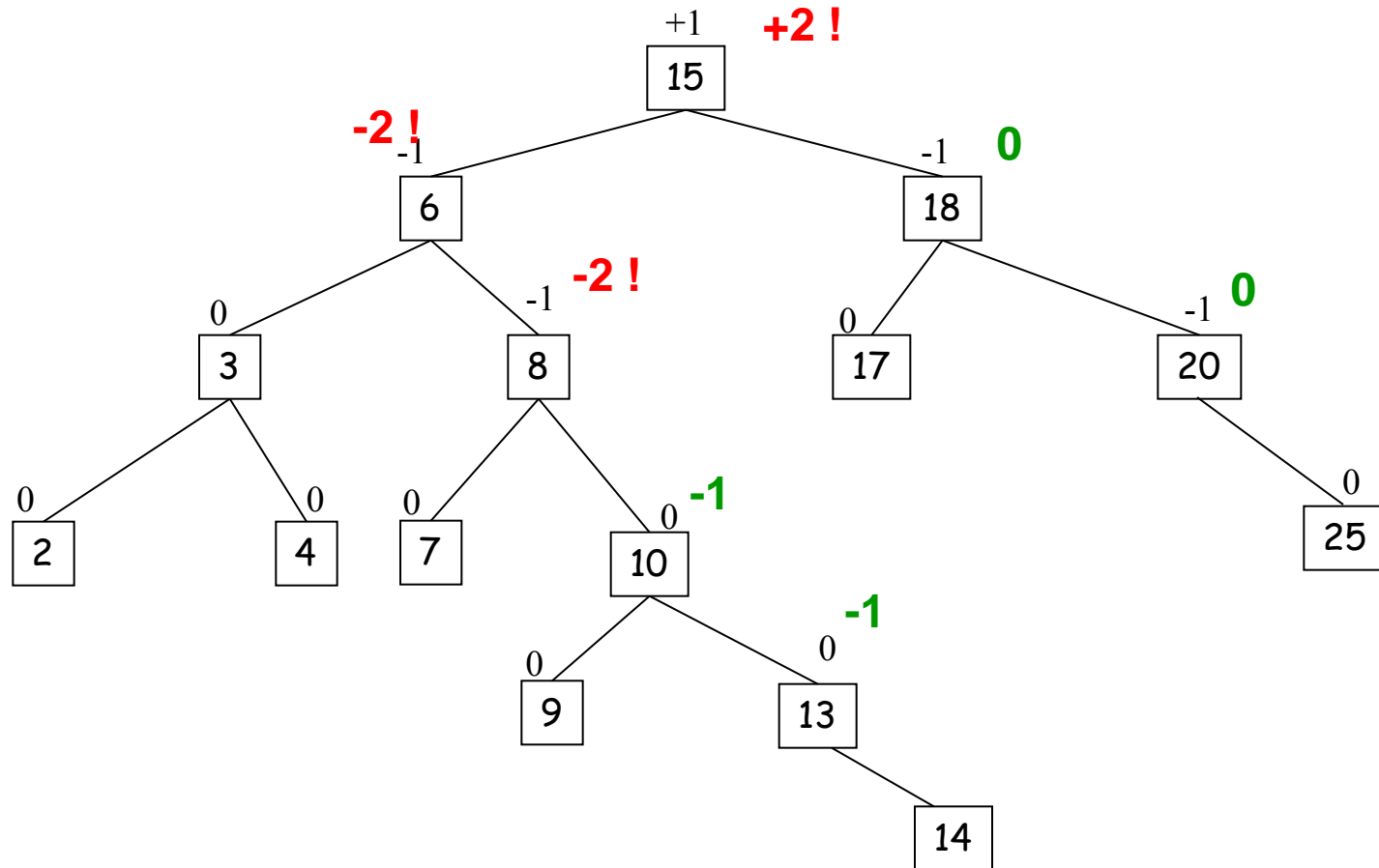
Ricorda che vale:

$$F_k = \Theta(\phi^k)$$

$\phi = 1.618\dots$ sezione aurea



Posso usare un albero AVL per implementare un dizionario?



come implemento **Insert(14)**?

...e **delete(25)**?

Domanda:

di quanto e quali fattori di bilanciamento cambiano a fronte di un inserimento/cancellazione?

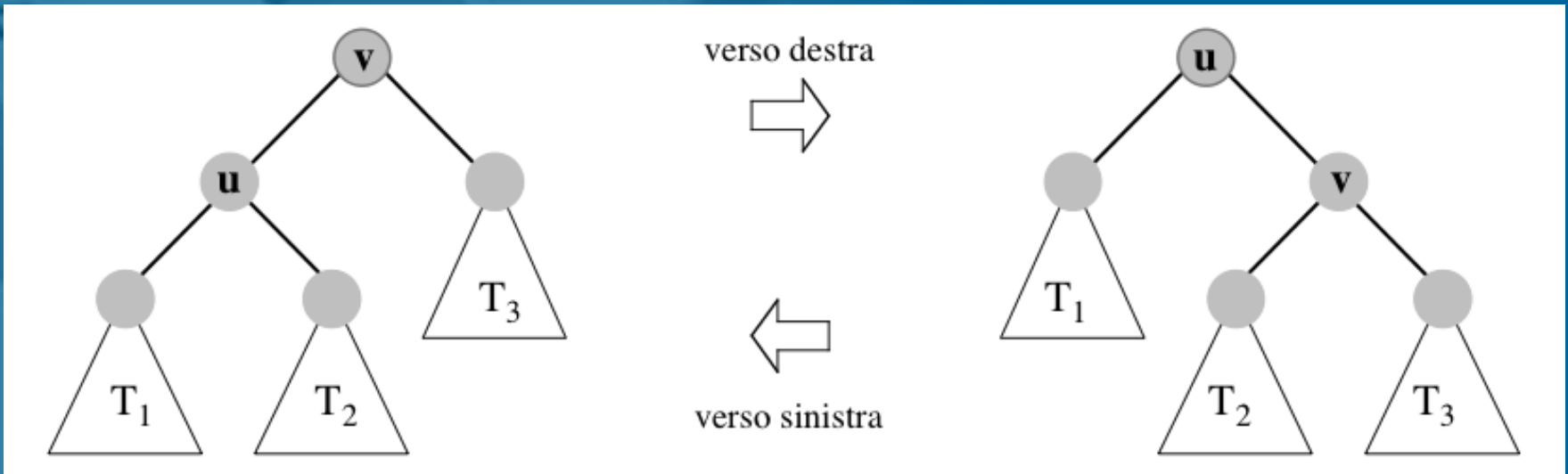
Se parto da un albero AVL e inserisco/cancello un nodo:

- (quali) cambiano solo i fattori di bilanciamento dei nodi lungo il cammino radice-nodo inserito/cancellato
- (quanto) i fattori di bilanciamento cambiano di +/- 1

Implementazione delle operazioni

- L'operazione search procede come in un BST
 - Ma inserimenti e cancellazioni potrebbero sbilanciare l'albero
- ⇒ Manteniamo il bilanciamento tramite opportune **rotazioni**

Rotazione di base verso destra/sinistra sul nodo v/u



- Mantiene la proprietà di ricerca
- Richiede tempo $O(1)$

Ribilanciamento tramite rotazioni

- Le rotazioni sono effettuate su nodi sbilanciati
- Sia v un nodo di profondità massima (nodo **critico**) con fattore di bilanciamento $\beta(v) \pm 2$
- Esiste un sottoalbero T di v che lo sbilancia
- A seconda della posizione di T si hanno 4 casi:

$\beta(v)=+2$

$\beta(v)=-2$

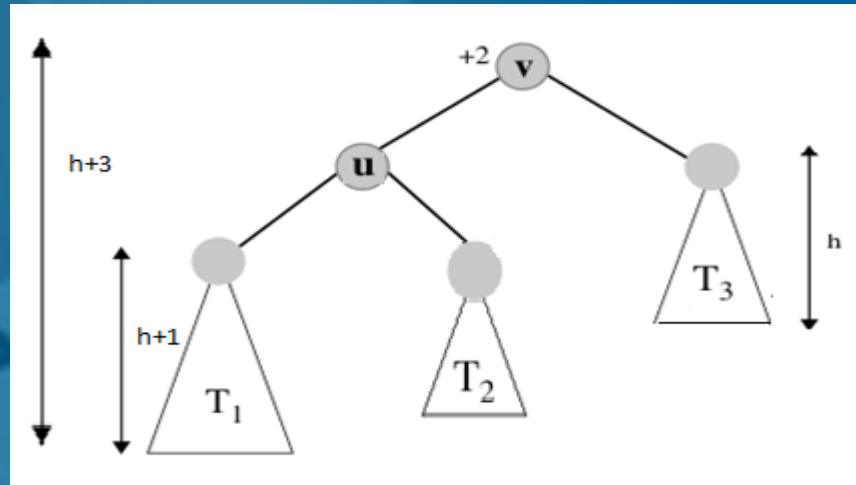
Sinistra - sinistra	(SS)	T è il sottoalbero sinistro del figlio sinistro di v
Destra - destra	(DD)	T è il sottoalbero destro del figlio destro di v
Sinistra - destra	(SD)	T è il sottoalbero destro del figlio sinistro di v
Destra - sinistra	(DS)	T è il sottoalbero sinistro del figlio destro di v

- I quattro casi sono simmetrici a coppie

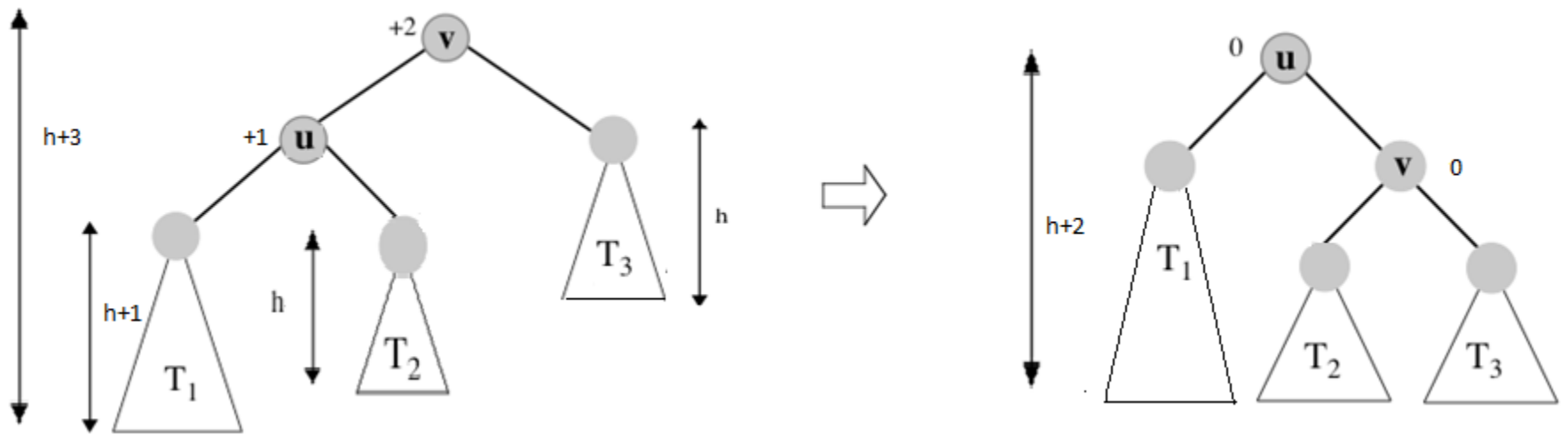
$[\beta(v)=+2, \text{altezza } T_1=h+1]$

Caso SS

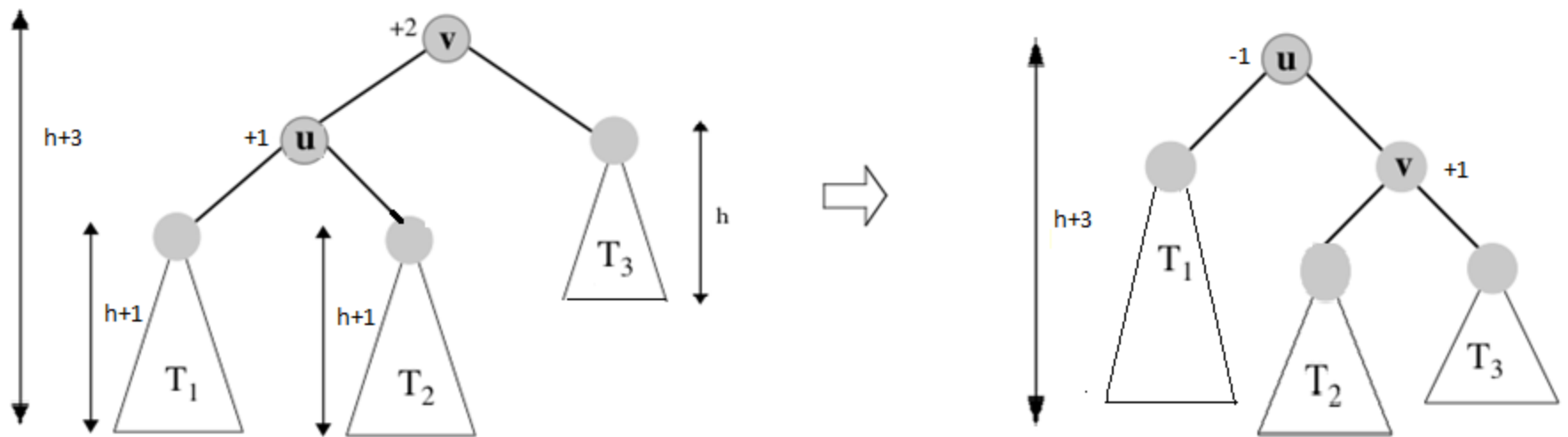
- L'altezza di $T(v)$ è $h+3$, l'altezza di $T(u)$ è $h+2$, l'altezza di T_3 è h , e l'altezza di T_1 è $h+1 \Rightarrow \beta(v)=+2$ e lo sbilanciamento è provocato da T_1



- Si applica una rotazione semplice verso destra su v ; 2 sottocasi possibili:
 - (i) l'altezza di T_2 è $h \Rightarrow$ l'altezza dell'albero coinvolto nella rotazione passa da $h+3$ a $h+2$
 - (ii) l'altezza di T_2 è $h+1 \Rightarrow$ l'altezza dell'albero coinvolto nella rotazione rimane pari a $h+3$



...i due sottocasi del caso SS...



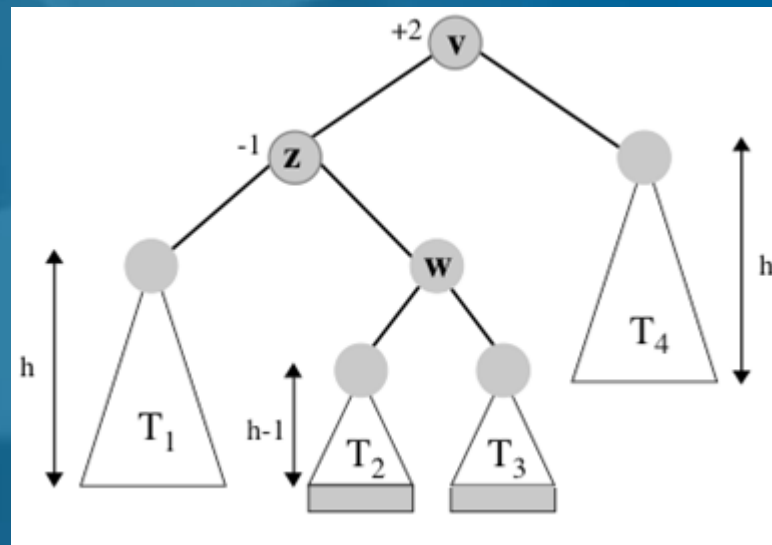
Osservazioni sul caso SS

- Dopo la rotazione l'albero è bilanciato (tutti i fattori di bilanciamento sono in modulo ≤ 1)
- L'**inserimento** di un elemento nell'AVL (ovvero, l'aggiunta di una **foglia** a un albero bilanciato) può provocare solo il caso (i) (perché altrimenti l'AVL era già sbilanciato!)
- Invece, la **cancellazione** di un elemento dall'AVL (che necessariamente fa diminuire l'altezza di qualche sottoalbero) può provocare entrambi i casi (ad esempio, se cancellando un elemento ho abbassato l'altezza di T_3)
- Nel caso (i), dopo la rotazione, l'albero diminuisce la sua altezza di uno

Caso SD

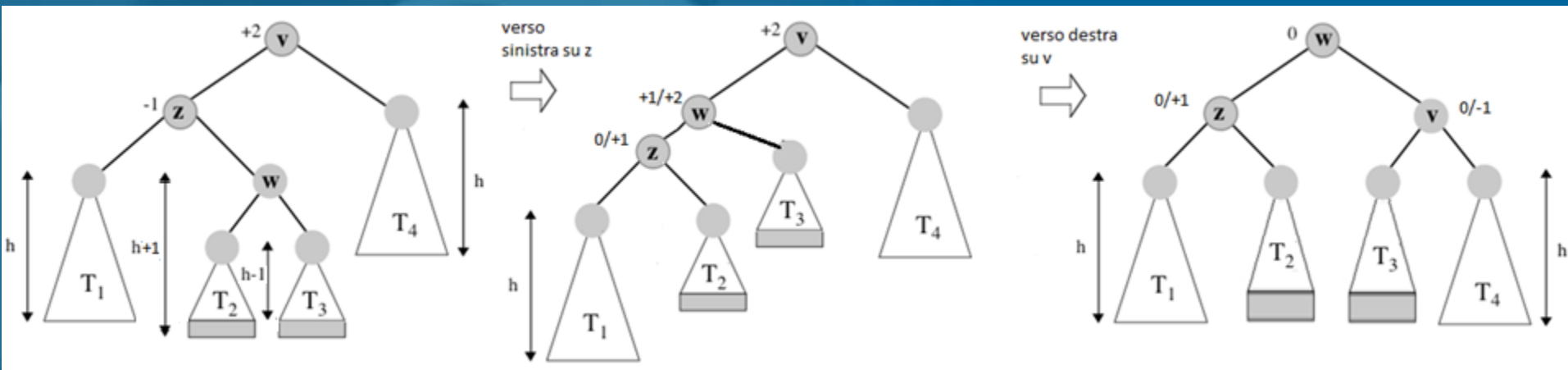
$[\beta(v)=+2, \text{altezza } T_1=h]$

- L'altezza di $T(v)$ è $h+3$, l'altezza di $T(z)$ è $h+2$, l'altezza di T_1 è h , l'altezza di T_4 è h , e l'altezza di $T(w)$ è $h+1 \Rightarrow \beta(v)=+2$, e $\beta(z)=-1$ cioè lo sbilanciamento è provocato dal sottoalbero destro di z



- Applicare due rotazioni semplici: una verso sinistra sul figlio sinistro del nodo critico (nodo z), l'altra verso destra sul nodo critico (nodo v)

Caso SD



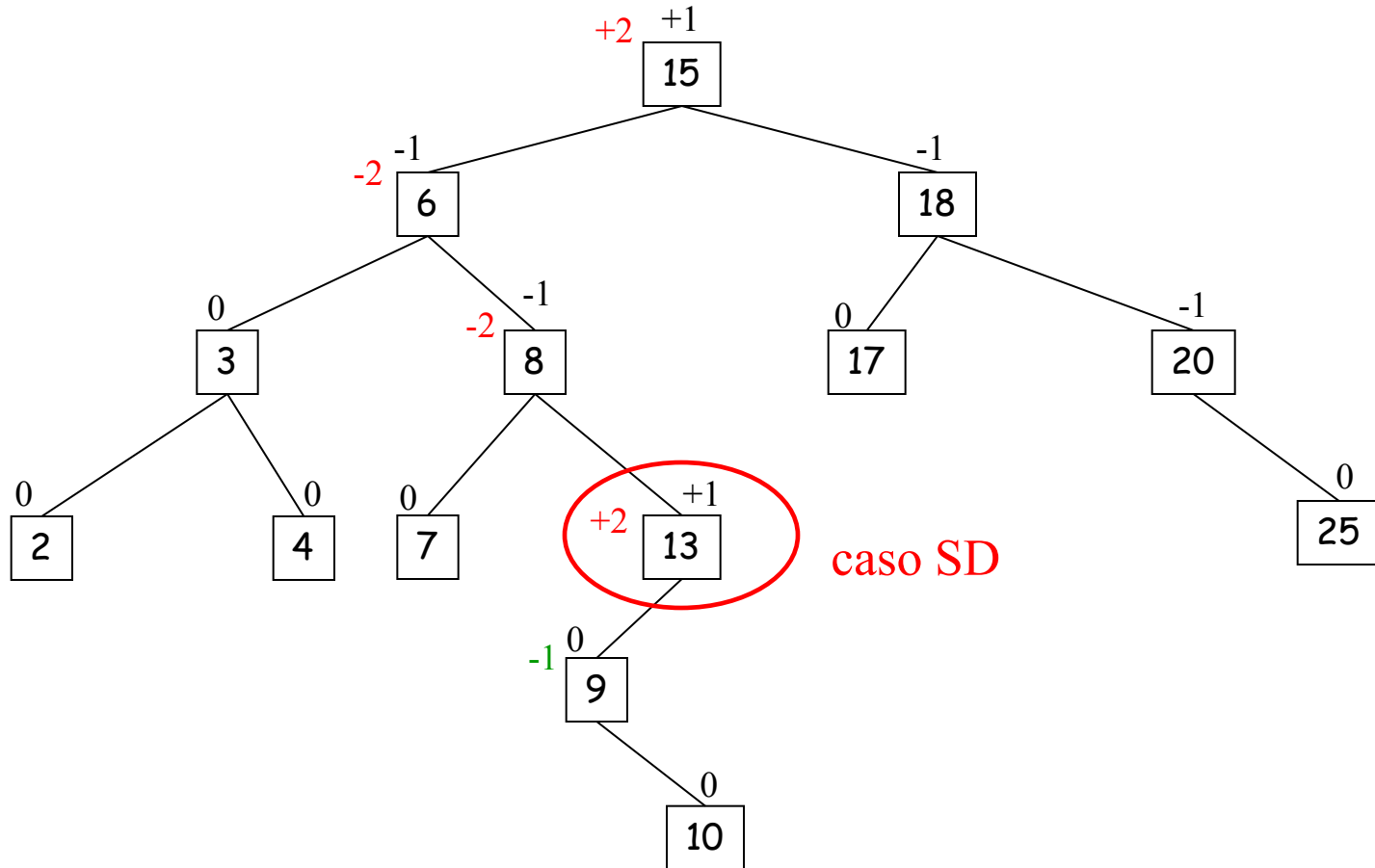
- L'altezza dell'albero dopo la rotazione passa da $h+3$ a $h+2$, poiché T_2 e T_3 sono alti al più h , e il fattore di bilanciamento di w diventa 0 , mentre i fattori di bilanciamento di z e v sono 0 oppure ± 1 .
- Il caso SD può essere provocato sia da inserimenti (in T_2 o T_3), sia da cancellazioni che abbassano di 1 l'altezza di T_4 .

insert(elem e, chiave k)

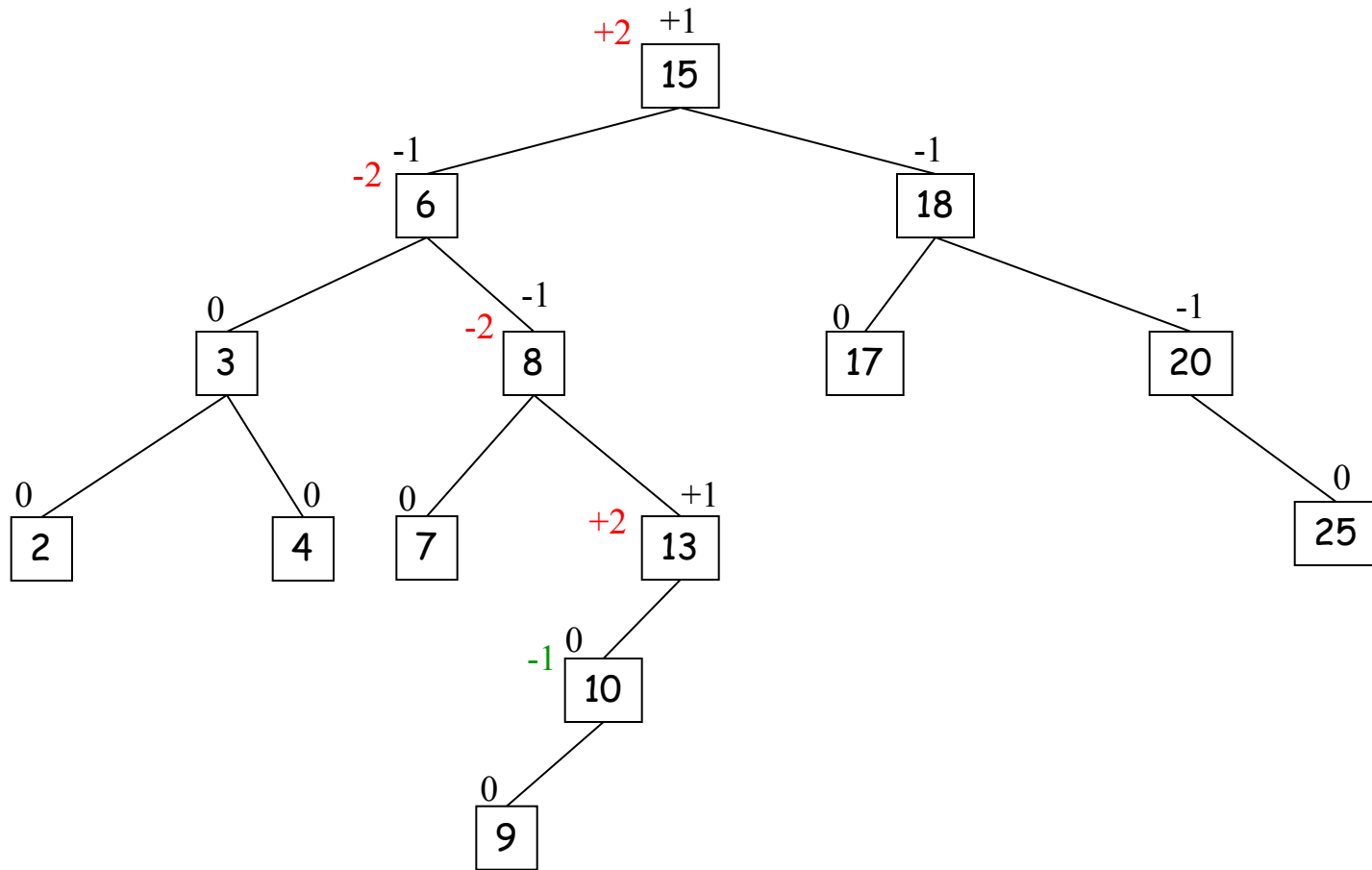
1. Crea un nuovo nodo u con elem=e e chiave=k
2. Inserisci u come in un BST
3. Ricalcola i fattori di bilanciamento dei nodi nel cammino dalla radice a u: sia v il più profondo nodo con fattore di bilanciamento pari a ± 2 (**nodo critico**)
4. Esegui una rotazione opportuna su v

Oss.: un solo ribilanciamento è sufficiente, poiché l'altezza dell'albero coinvolto diminuisce di 1 (sottocaso (i) del caso SS o DD, o casi SD o DS), e quindi torna ad essere **uguale** all'altezza che aveva **prima dell'inserimento**

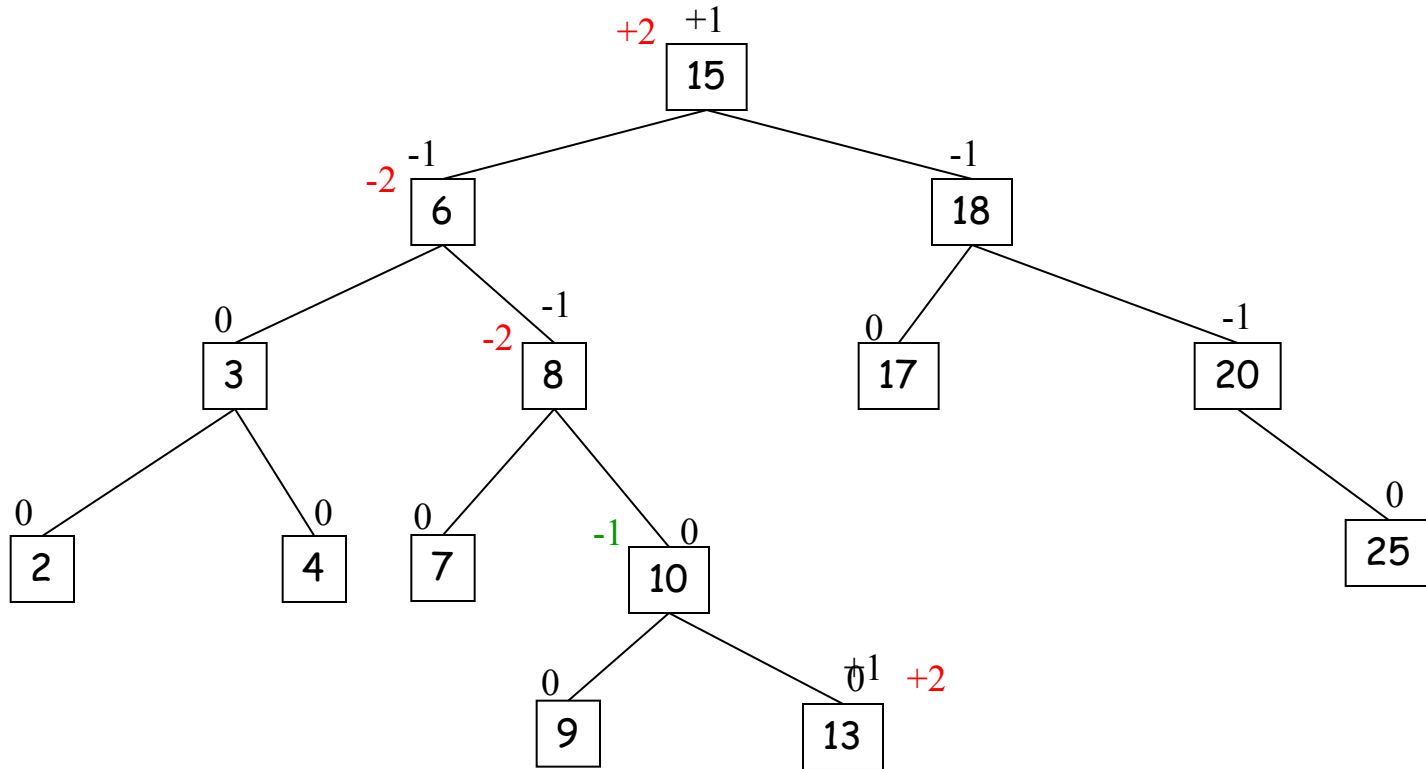
insert (10,e)



insert (10,e)



Esempio: insert (10,e)

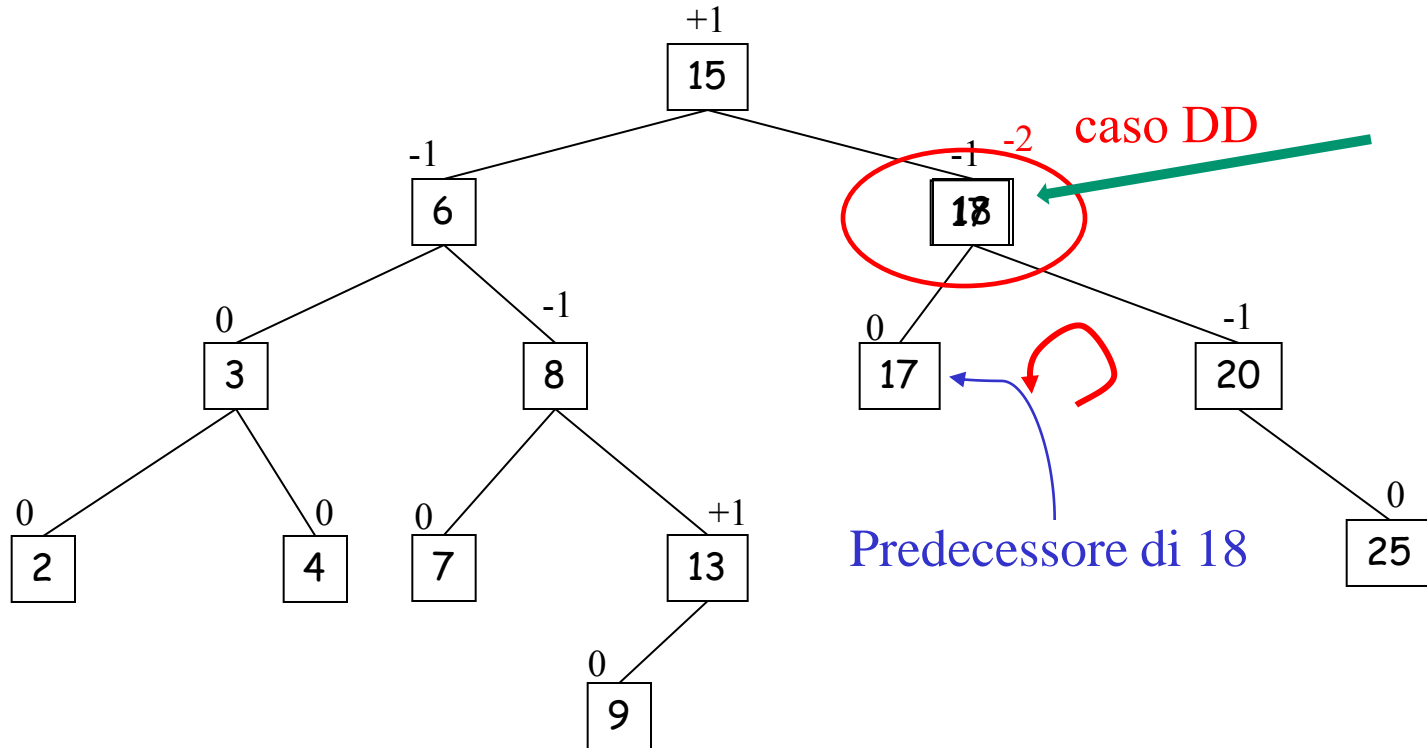


delete(elem e)

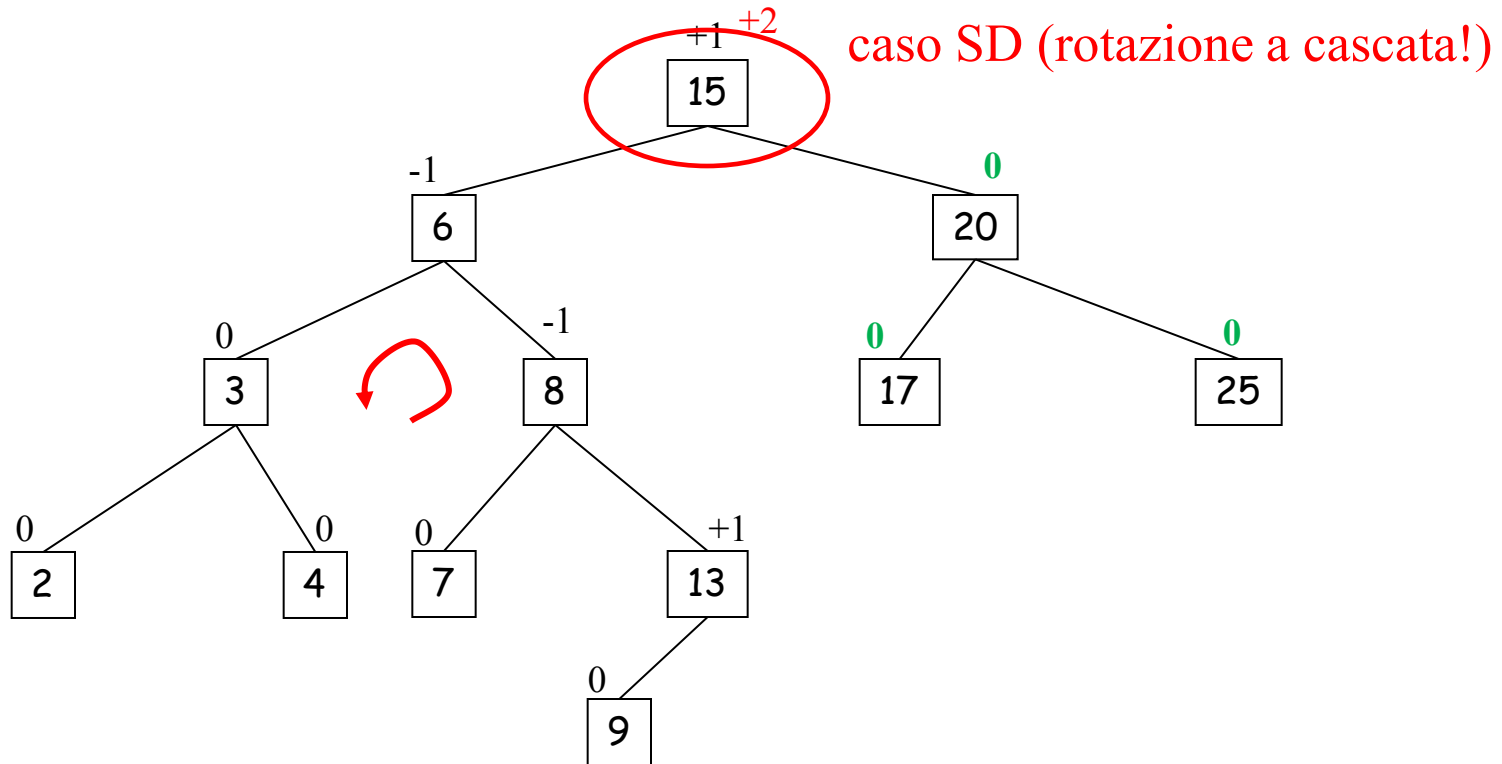
1. Cancella il nodo come in un BST
2. Ricalcola il fattore di bilanciamento del **padre del nodo eliminato fisicamente** (che potrebbe essere diverso dal nodo contenente **e**), ed esegui l'opportuna rotazione semplice o doppia ove necessario
3. Ripeti questo passo, sino ad arrivare eventualmente alla radice dell'AVL:
 - Se l'altezza del sottoalbero appena ribilanciato è uguale a quella che aveva prima della cancellazione, termina. Invece, se tale altezza è diminuita, risali verso l'alto (cioè vai nel padre del sottoalbero appena ribilanciato), calcola il fattore di bilanciamento, e applica l'opportuno ribilanciamento.

Oss.: potrebbero essere necessarie **$O(\log n)$** rotazioni: infatti eventuali diminuzioni di altezza indotte dalle rotazioni possono propagare lo sbilanciamento verso l'alto nell'albero (l'altezza del sottoalbero in cui è avvenuta la rotazione **diminuisce di 1** rispetto a quella che aveva **prima della cancellazione**)

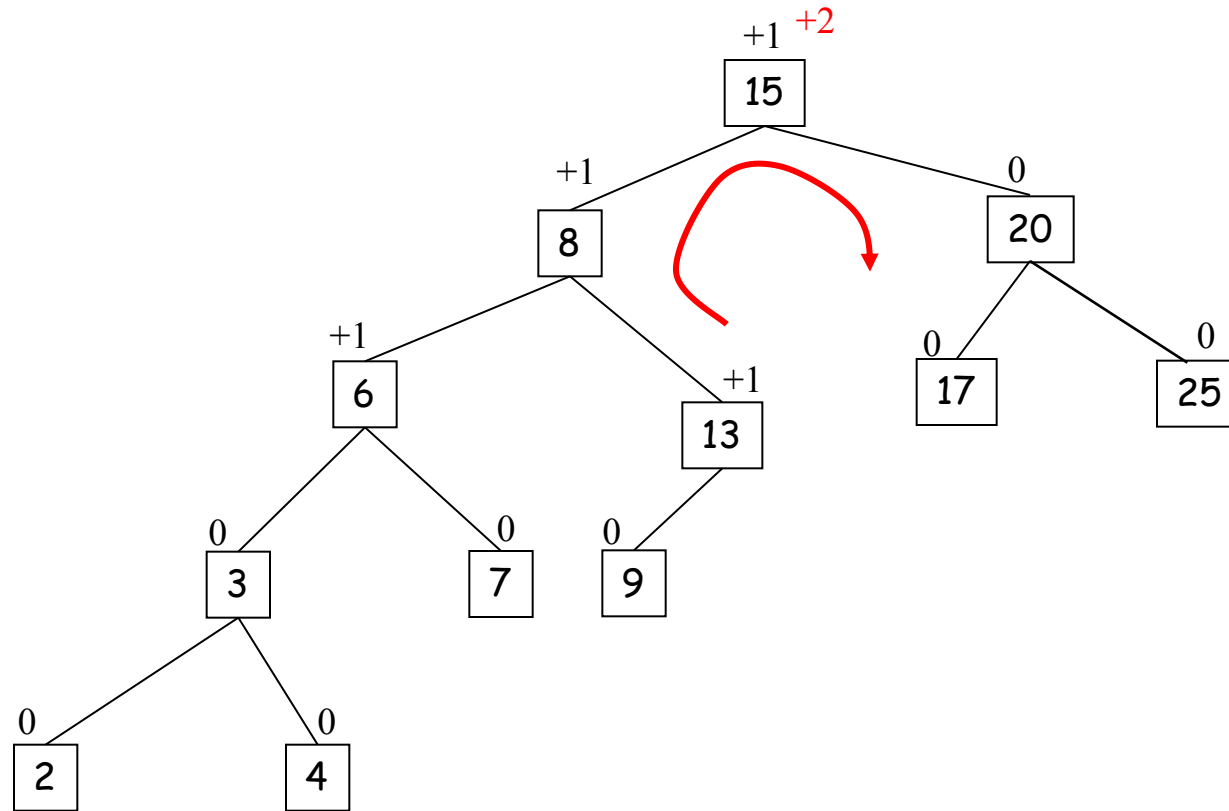
Esempio: delete (18)



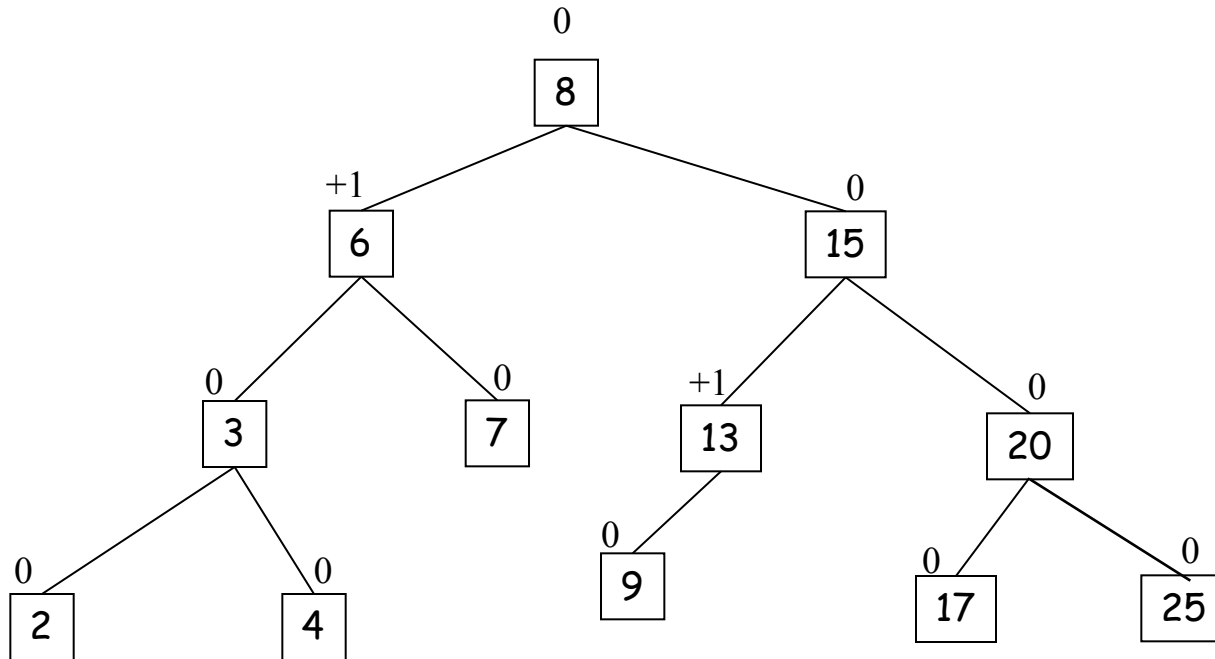
Ribilanciamento DD e aggiornamento del fattore di bilanciamento del padre del sottoalbero ruotato



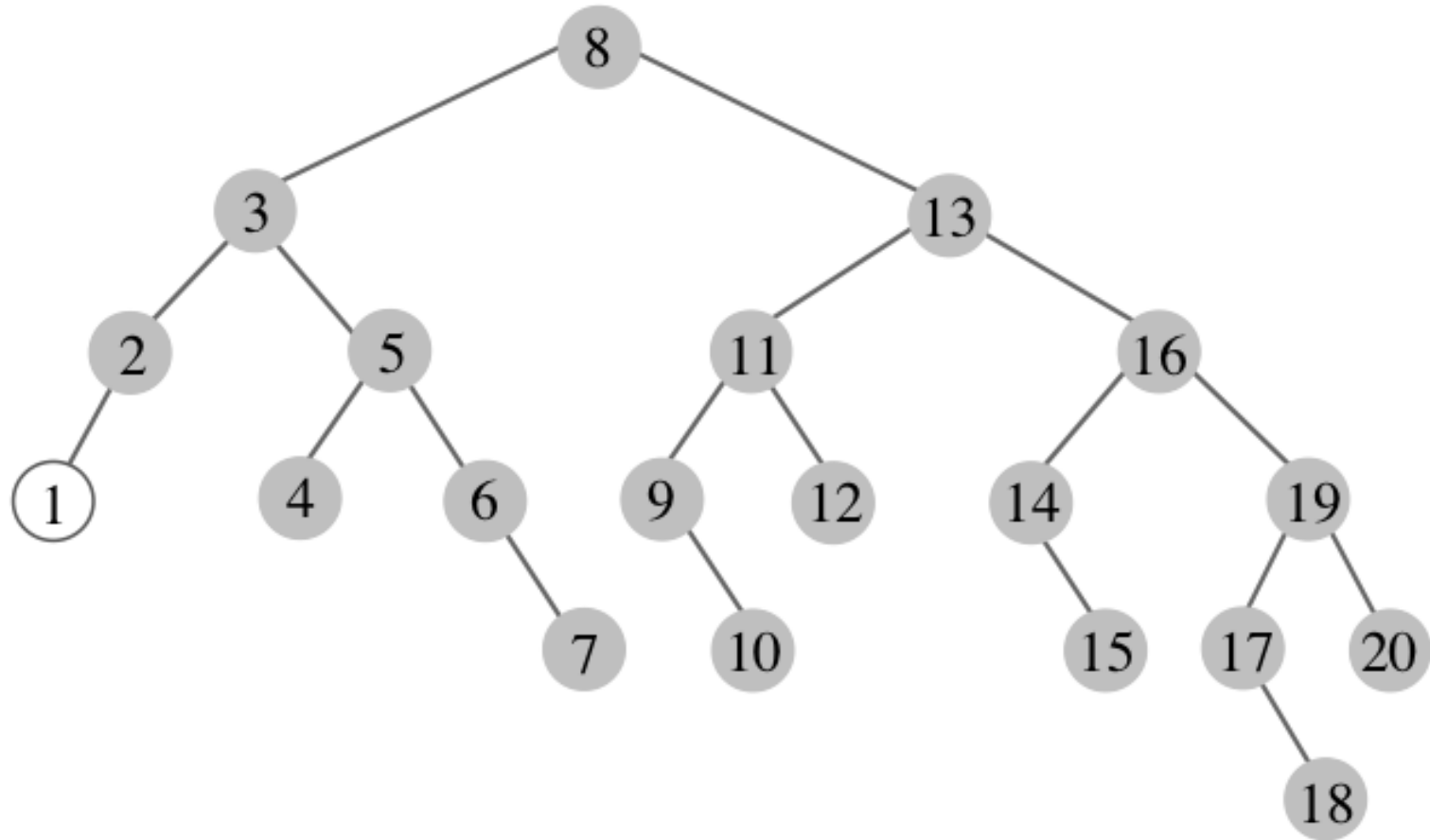
Ribilanciamento SD



Albero ribilanciato



Cancellazione con rotazioni a cascata



Costo delle operazioni

- Tutte le operazioni hanno costo $O(\log n)$ poiché l'altezza dell'albero è $O(\log n)$ e ciascuna rotazione richiede solo tempo costante

Classe AlberoAVL

classe AlberoAVL estende AlberoBinarioDiRicerca:

dati:

$$S(n) = O(n)$$

albero binario di ricerca T ereditato, più il fattore di bilanciamento di ogni nodo.

operazioni:

search(*chiave k*) → *elem*
ereditata.

$$T(n) = O(\log n)$$

insert(*elem e, chiave k*)

$$T(n) = O(\log n)$$

chiama *insert*() ereditata, poi ricalcola i fattori di bilanciamento ed eventualmente ribilancia tramite $O(1)$ rotazioni.

delete(*elem e*)

$$T(n) = O(\log n)$$

chiama *delete*() ereditata, poi ricalcola i fattori di bilanciamento ed eventualmente ribilancia tramite $O(\log n)$ rotazioni.