

# Progettare algoritmi veloci usando strutture dati efficienti

Un esempio: HeapSort

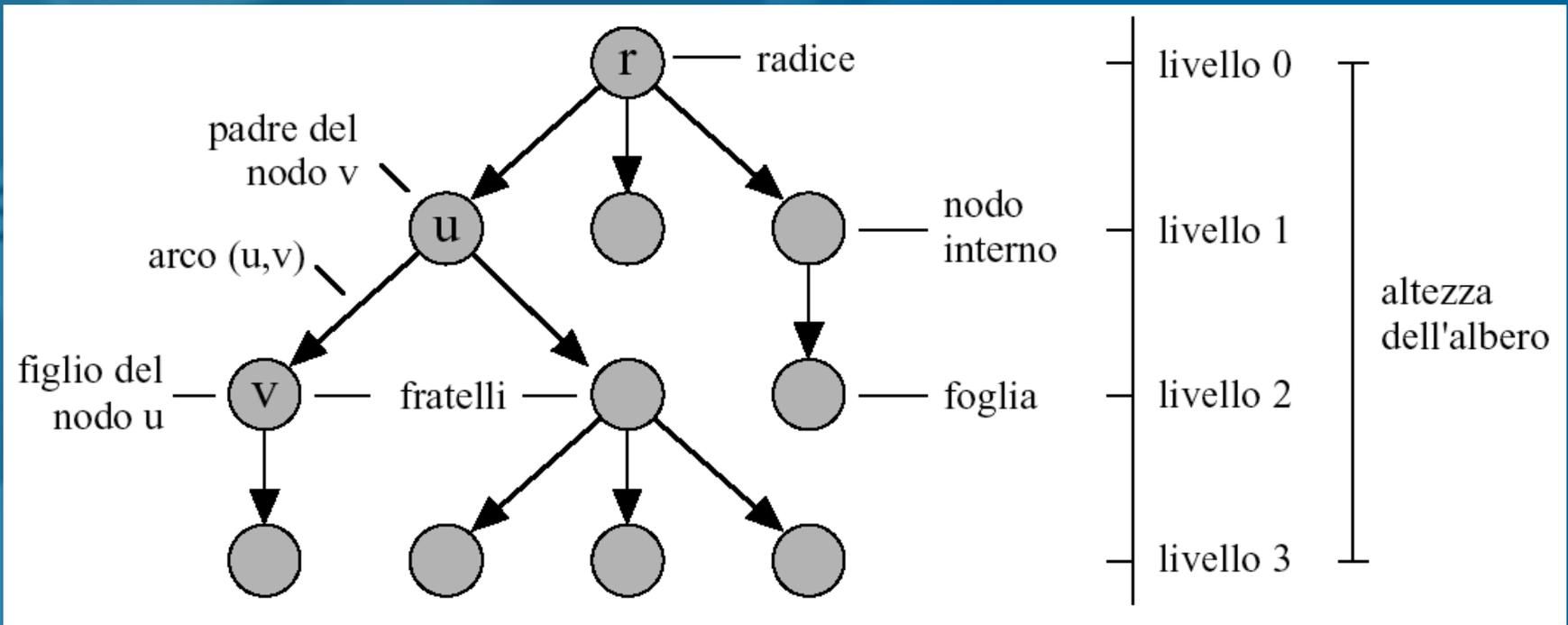
# HeapSort: l'idea

- Stesso approccio incrementale del SelectionSort
  - seleziona gli elementi dal più grande al più piccolo
  - usa una **struttura dati efficiente**
    - estrazione in tempo  $O(\log n)$  del massimo

# HeapSort

- **Tipo di dato**
  - Specifica una collezione di oggetti e delle operazioni di interesse su tale collezione (es. Dizionario: mantiene un insieme di elementi con chiavi soggetto a operazioni di inserimento, cancellazione, ricerca)
- **Struttura dati**
  - Organizzazione dei dati che permette di memorizzare la collezione e supportare le operazioni di un tipo di dato usando meno risorse di calcolo possibile
- **Cruciale: progettare una struttura dati  $H$  su cui eseguire efficientemente le operazioni:**
  - dato un array  $A$ , generare velocemente  $H$
  - trovare il più grande oggetto in  $H$
  - cancellare il più grande oggetto da  $H$

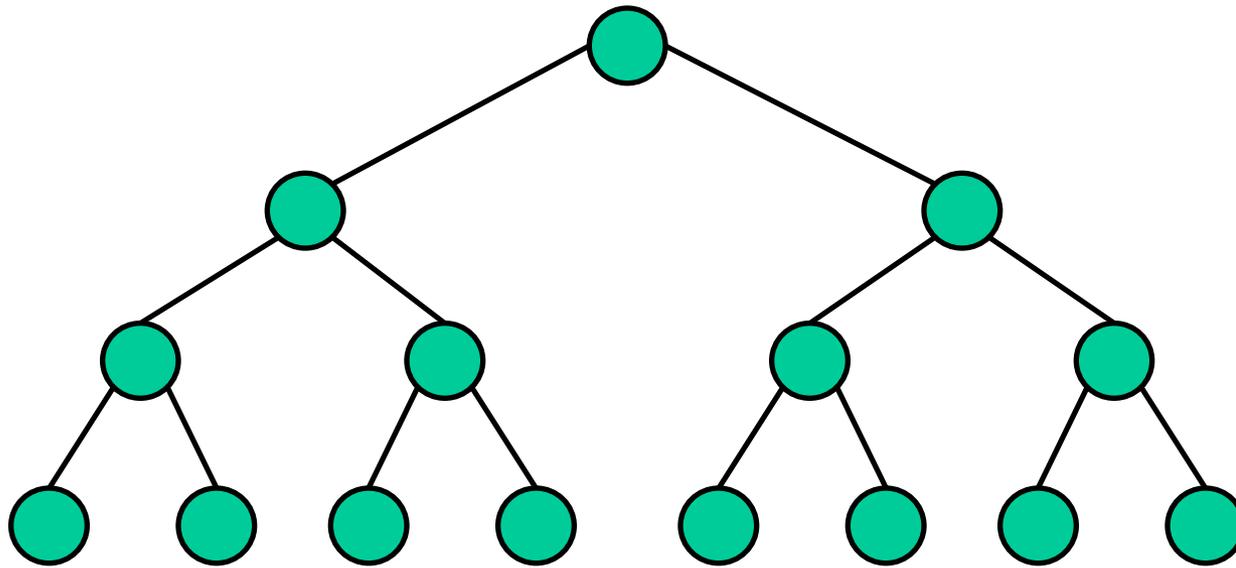
# Alberi: qualche altra definizione



**albero d-ario**: albero in cui tutti i nodi interni hanno (al più)  $d$  figli

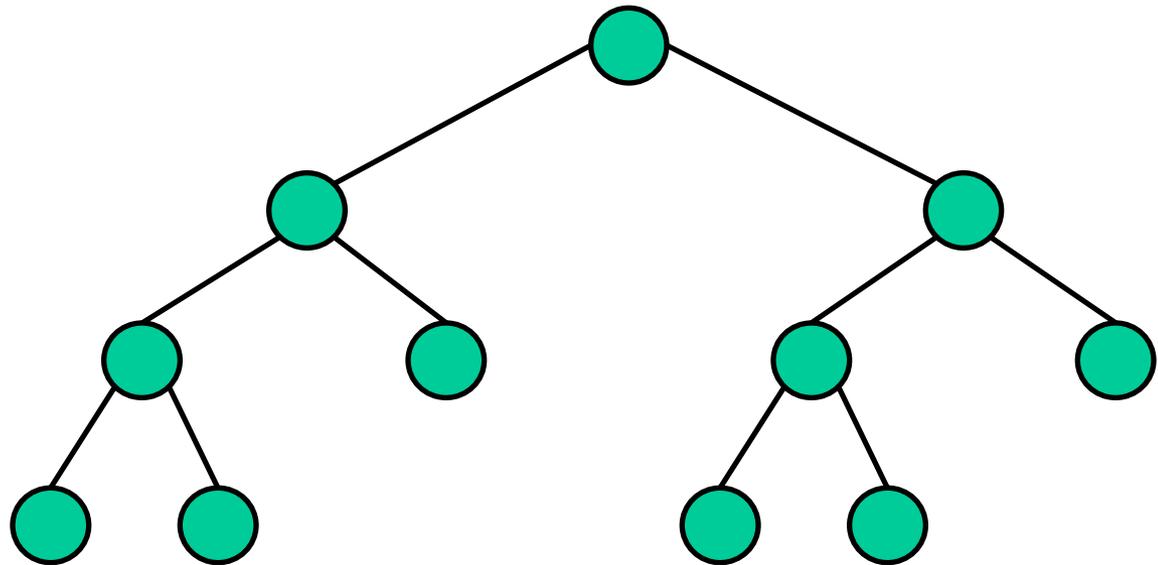
$d=2 \rightarrow$  **albero binario**

un albero  $d$ -ario è **completo**: se tutti nodi interni hanno esattamente  $d$  figli e le foglie sono tutte allo stesso livello



albero binario  
completo

albero binario  
(non completo)

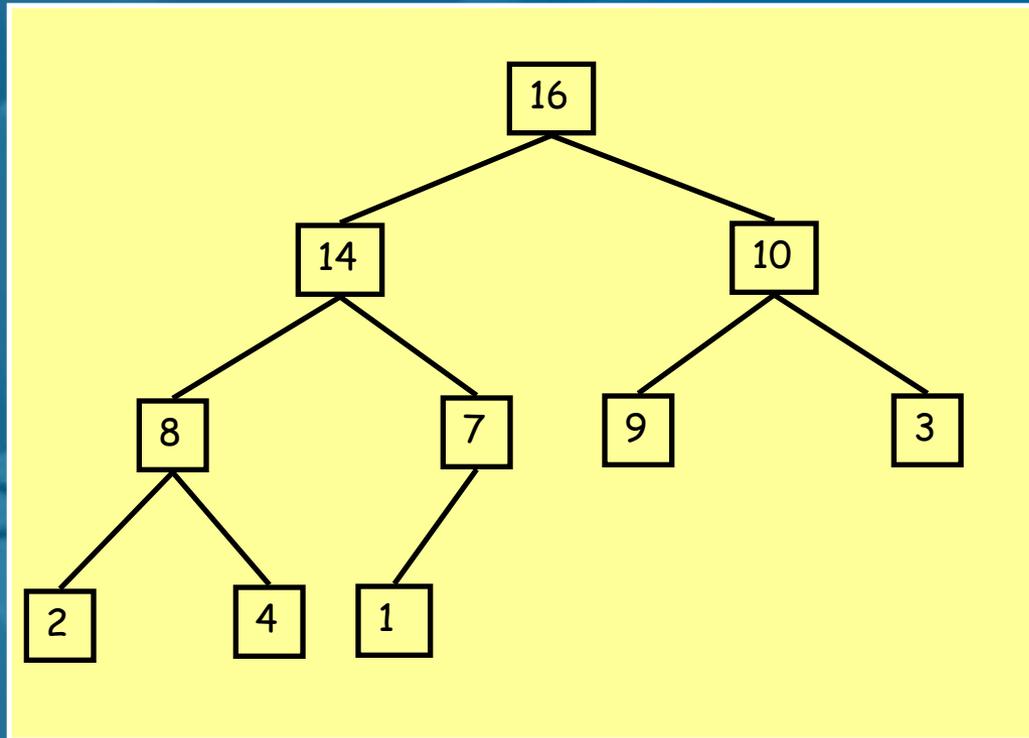


# HeapSort

- **Struttura dati heap** associata ad un insieme  $S =$  albero binario radicato con le seguenti proprietà:
  - 1) completo fino al penultimo livello (struttura rafforzata: foglie sull'ultimo livello tutte compattate a sinistra)
  - 2) gli elementi di  $S$  sono memorizzati nei nodi dell'albero (ogni nodo  $v$  memorizza uno e un solo elemento, denotato con  $\text{chiave}(v)$ )
  - 3)  **$\text{chiave}(\text{padre}(v)) \geq \text{chiave}(v)$**  per ogni nodo  $v$  diverso dalla radice

...un esempio

In questa  
direzione è  
presente un  
ordinamento



il massimo è  
contenuto  
nella radice!



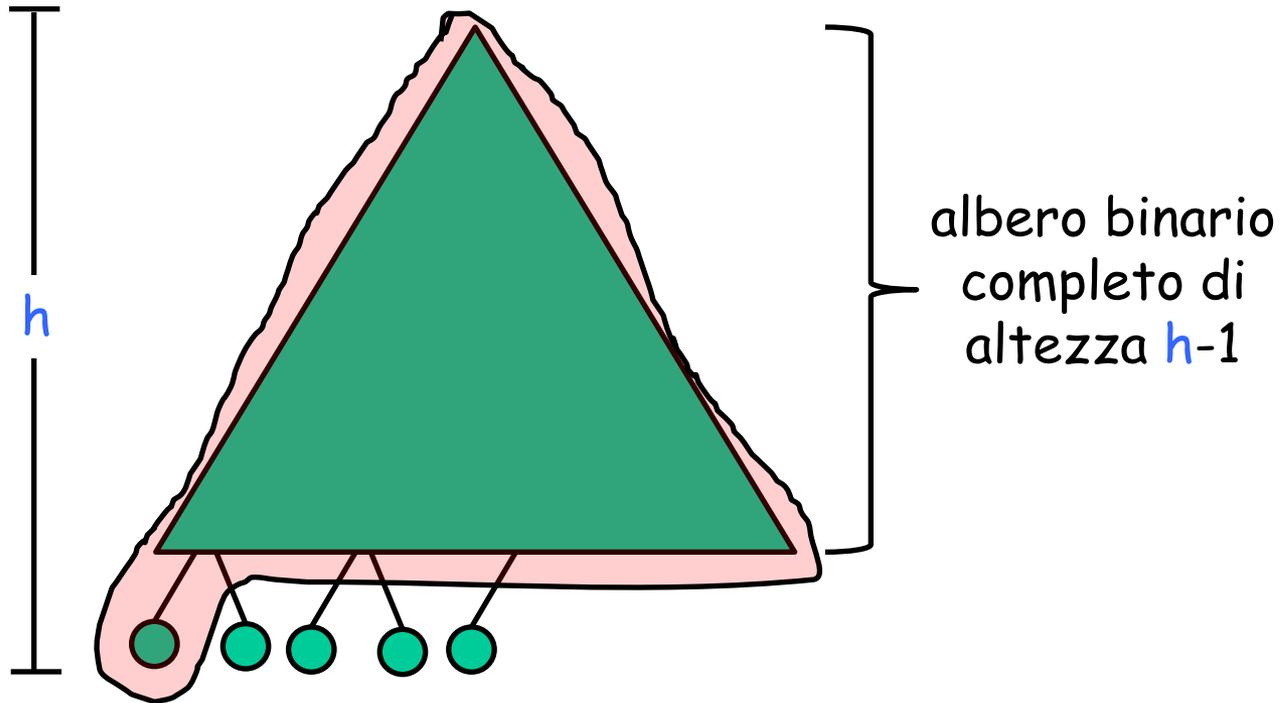
In questa direzione non è  
presente un ordinamento

# Proprietà salienti degli heap

- 1) Il **massimo** è contenuto **nella radice**
- 2) L'albero ha **altezza  $O(\log n)$**
- 3) Gli heap con struttura rafforzata possono essere rappresentati in un **array di dimensione pari a  $n$**

# Altezza di un heap

Sia  $H$  un heap di  $n$  nodi e altezza  $h$ .

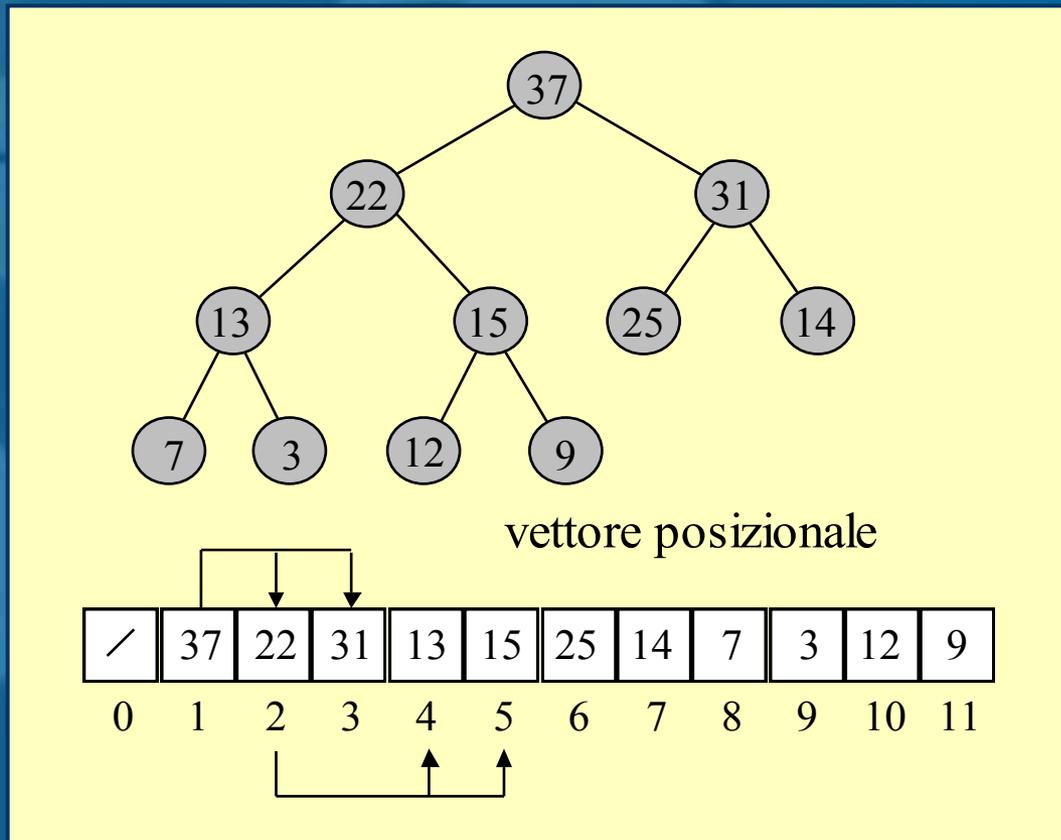


$$n \geq 1 + \sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 1 + 2^h - 1 = 2^h$$

➔  $h \leq \log_2 n$

# Struttura dati heap

## Rappresentazione con vettore posizionale



$$\text{sin}(i) = 2i$$

$$\text{des}(i) = 2i+1$$

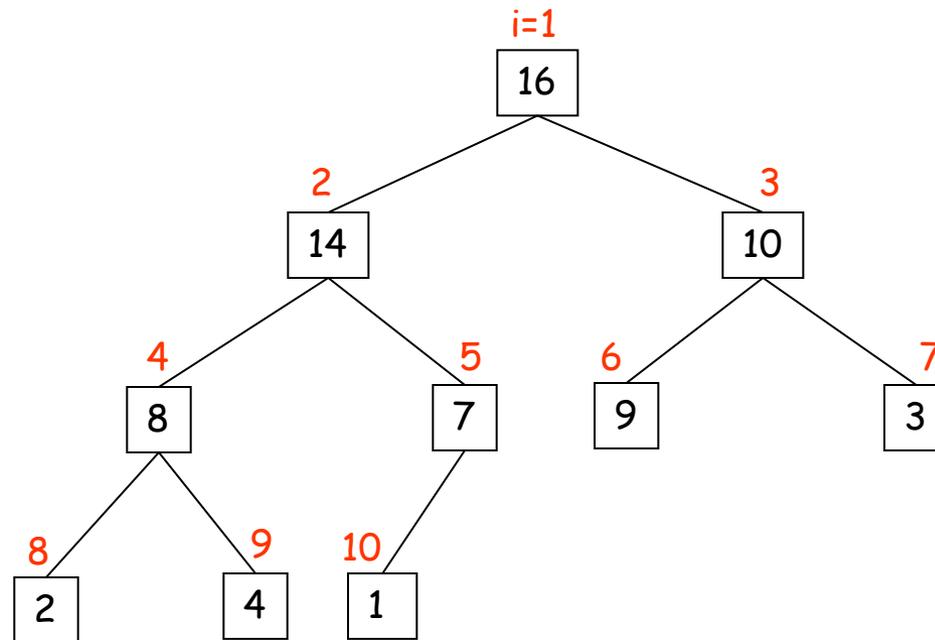
$$\text{padre}(i) = \lfloor i/2 \rfloor$$

è sufficiente un vettore di  
dimensione  $n$

in generale  
dimensione vettore  
diverso da numero  
elementi

nello pseudocodice numero oggetti  
indicato con  $\text{heapsize}[A]$

# ...ancora un esempio



Heap-size[A]

Heap-size[A] ≠ Length[A]

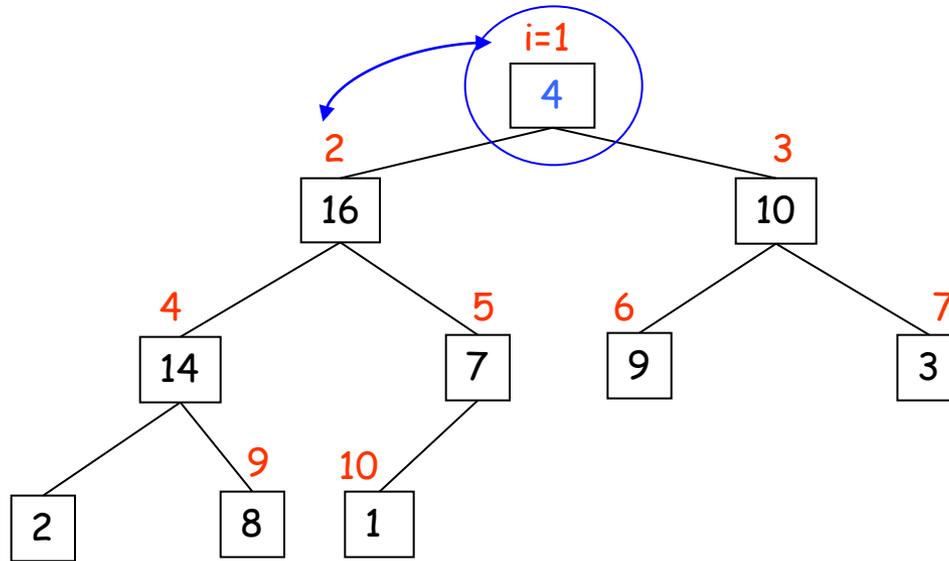
# La procedura `fixHeap`

Sia  $v$  la radice di  $H$ . Assume che i sottoalberi radicati nel figlio sinistro e destro di  $v$  sono heap, ma la proprietà di ordinamento delle chiavi non vale per  $v$ . Posso ripristinarla così:

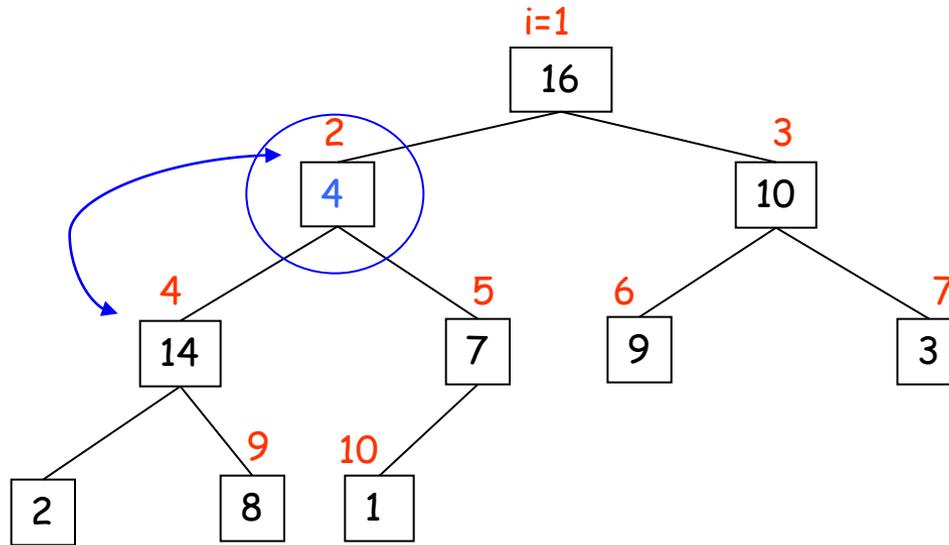
```
fixHeap(nodo v, heap H)
  if (v non è una foglia) then
    sia u il figlio di v con chiave massima
    if (chiave(v) < chiave(u)) then
      scambia chiave(v) e chiave(u)
      fixHeap(u, H)
```

Tempo di esecuzione:  $O(\log n)$

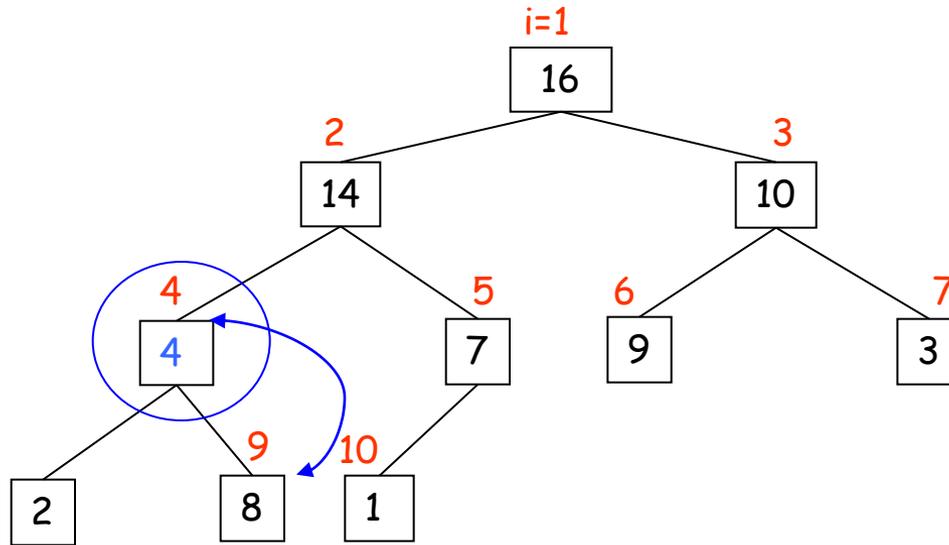
# FixHeap - esempio



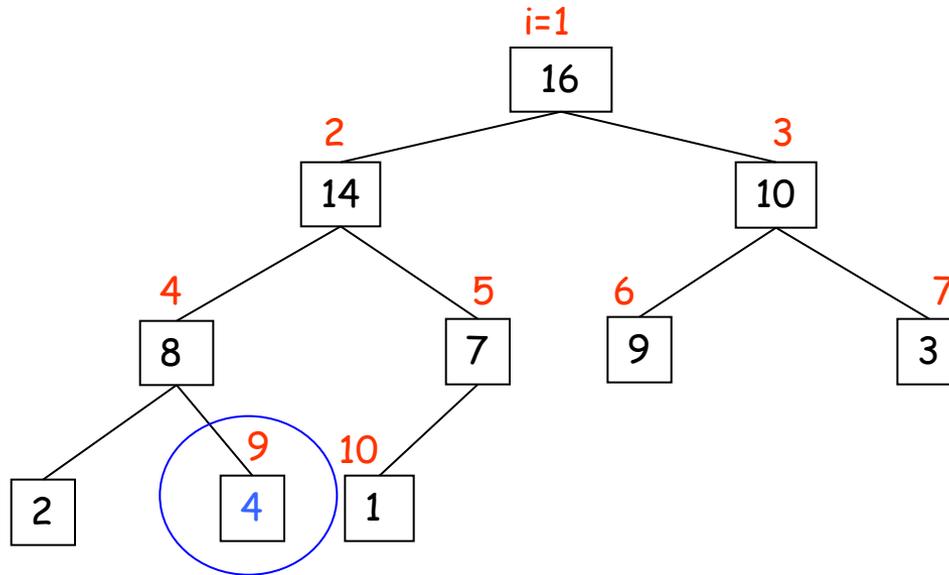
# FixHeap - esempio

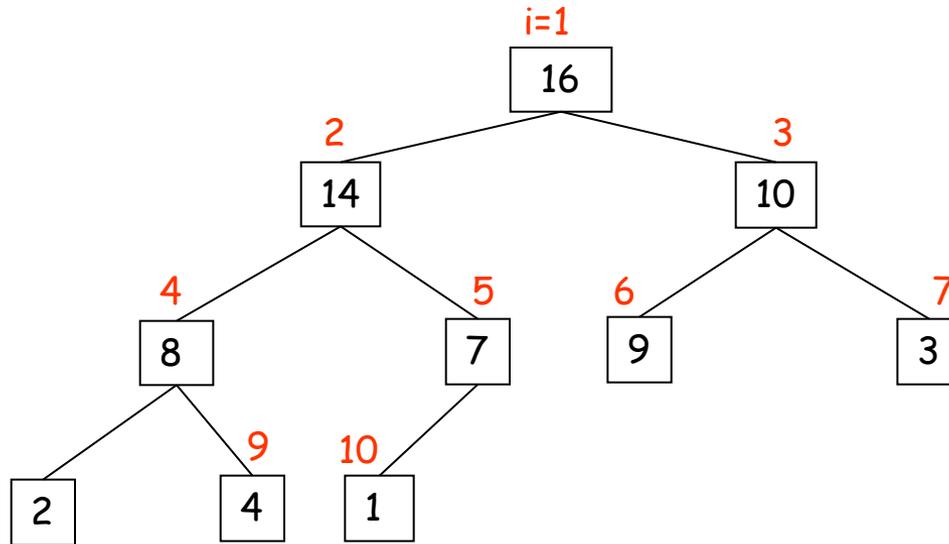


# FixHeap - esempio



# FixHeap - esempio





Complessità:  $O(\log n)$

uno pseudocodice di **fixHeap** più dettagliato  
(l'heap è mantenuto attraverso un vettore posizionale)

fixHeap (i,A)

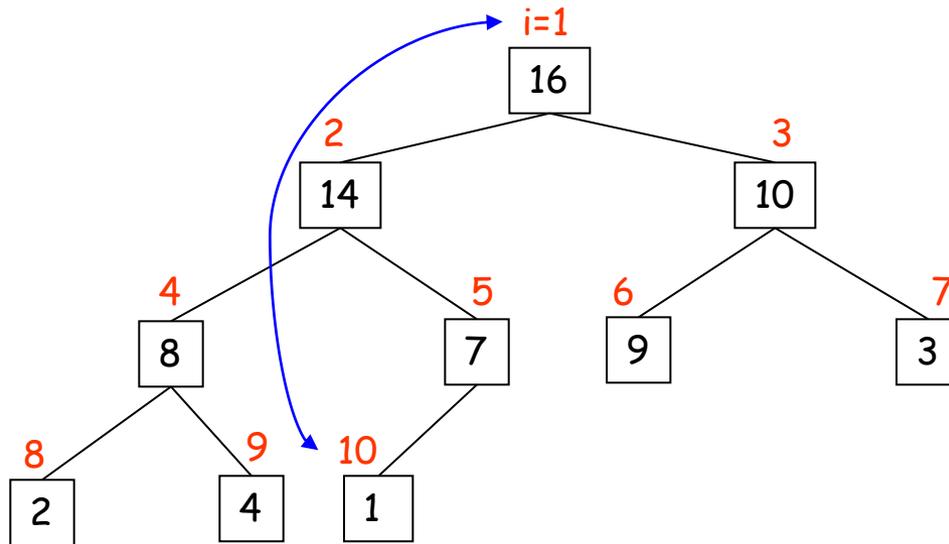
1.  $s = \text{sin}(i)$
2.  $d = \text{des}(i)$
3. **if** ( $s \leq \text{heapsize}[A]$  e  $A[s] > A[i]$ )
4.   **then** massimo=s
5.   **else** massimo=i
6. **if** ( $d \leq \text{heapsize}[A]$  e  $A[d] > A[\text{massimo}]$ )
7.   **then** massimo=d
8. **if** (massimo≠i)
9.   **then** scambia  $A[i]$  e  $A[\text{massimo}]$
10.     fixHeap(massimo,A)

# Estrazione del massimo

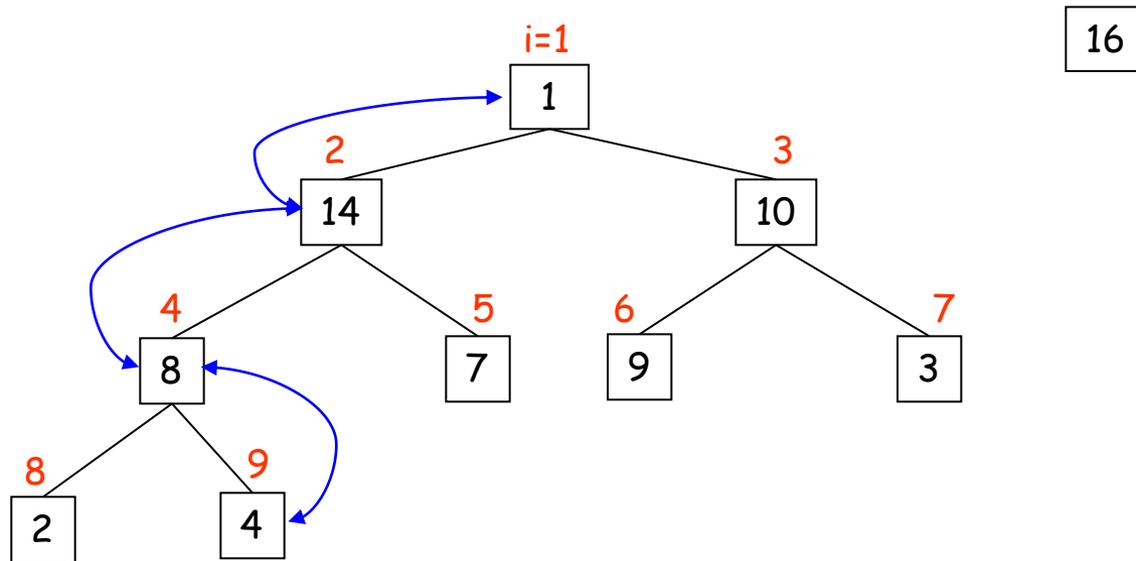
- Copia nella radice la chiave contenuta nella la foglia più a destra dell'ultimo livello
  - **nota:** è l'elemento in posizione  $n$  ( $n$ : dimensione heap)
- Rimuovi la foglia
- Ripristina la proprietà di ordinamento a heap richiamando `fixHeap` sulla radice

Tempo di esecuzione:  $O(\log n)$

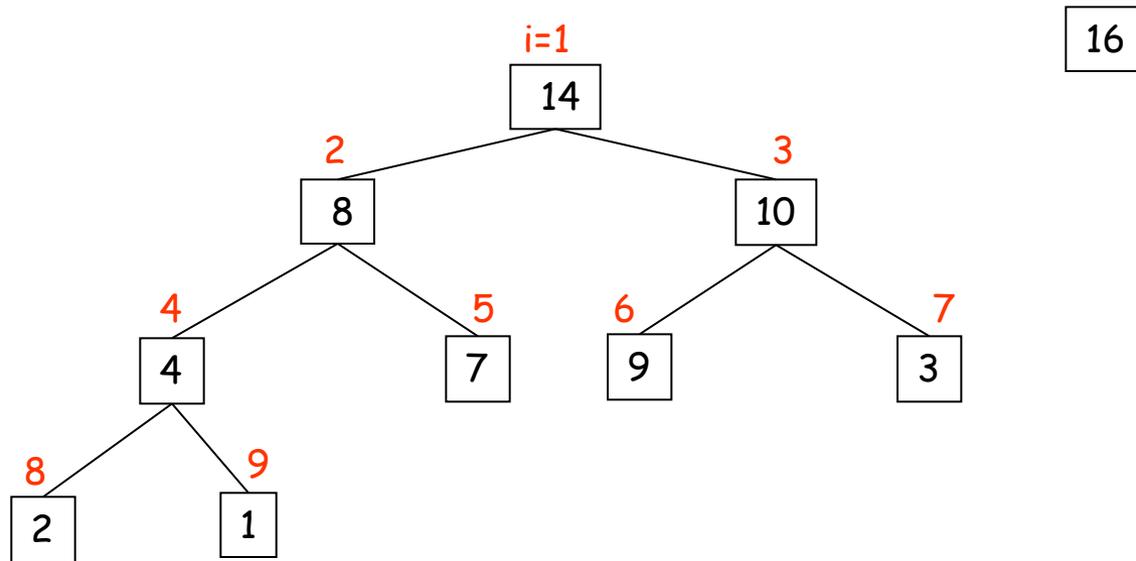
# Estrazione del massimo



# Estrazione del massimo



# Estrazione del massimo

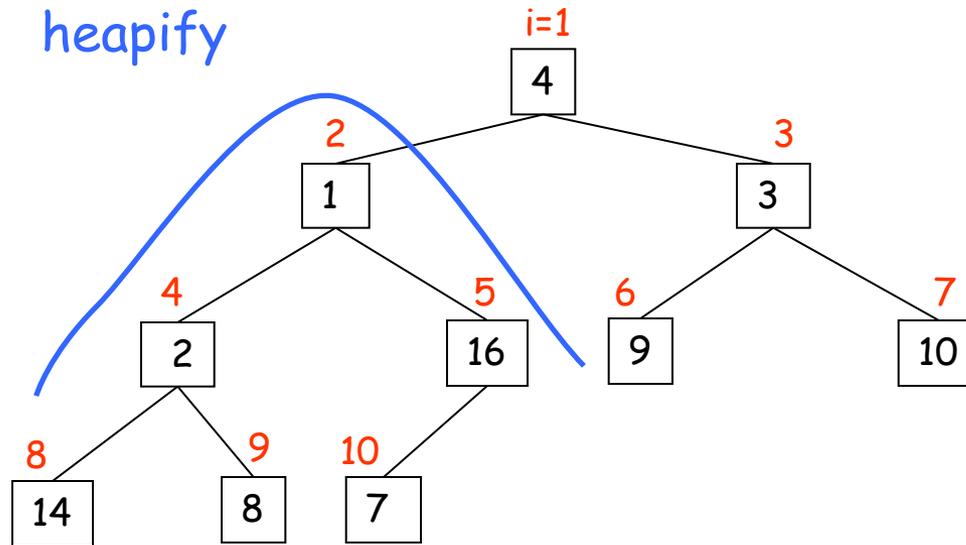


# Costruzione dell'heap

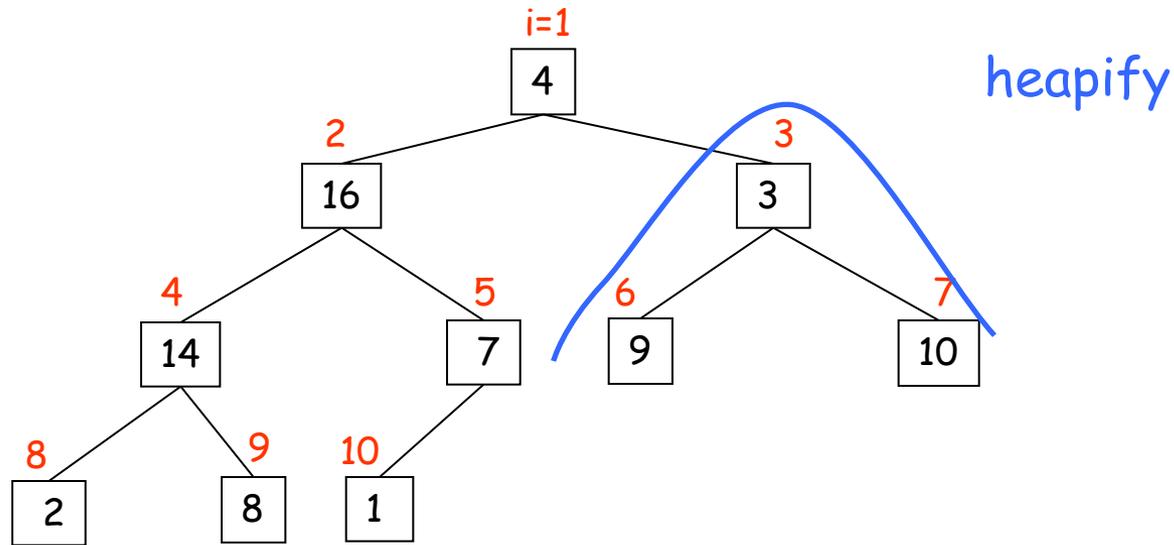
Algoritmo ricorsivo basato sulla tecnica del divide et impera

```
heapify(heap H)
  if (H non è vuoto) then
    heapify(sottoalbero sinistro di H)
    heapify(sottoalbero destro di H)
    fixHeap(radice di H,H)
```

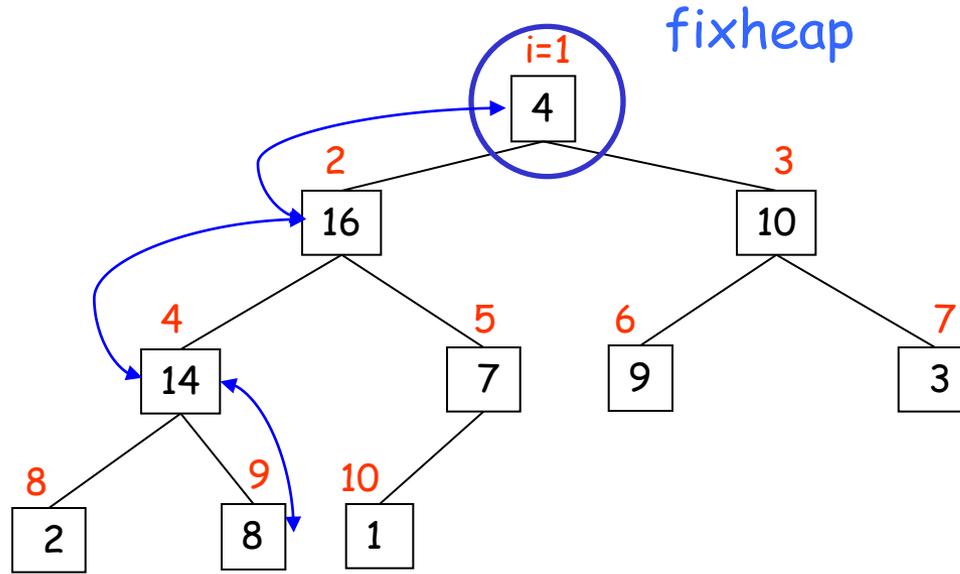
# Heapify - Un esempio



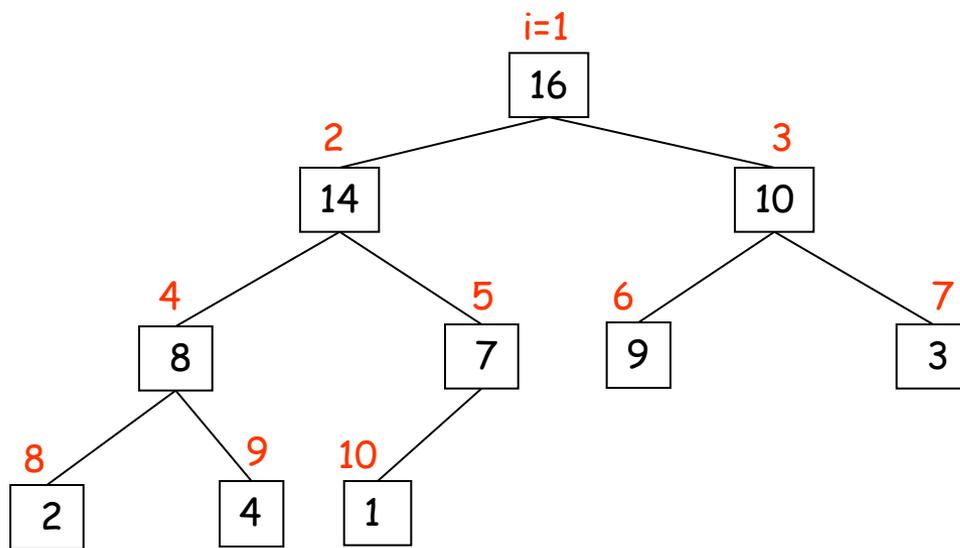
# Heapify - Un esempio



# Heapify - Un esempio



# Heapify - Un esempio



E' un **heap**!

# Complessità heapify

Sia  $h$  l'altezza di un heap con  $n$  elementi

Sia  $n' \geq n$  l'intero tale che un heap con  $n'$  elementi ha

1. altezza  $h$
2. è completo fino all'ultimo livello

Vale:  $T(n) \leq T(n')$  e  $n' \leq 2n$

Tempo di esecuzione:  $T(n') = 2 T((n'-1)/2) + O(\log n')$   
 $\leq 2 T(n'/2) + O(\log n')$

➔  $T(n') = O(n')$  dal Teorema Master

Quindi:  $T(n) \leq T(n') = O(n') = O(2n) = O(n)$

## Esercizio

Scrivere lo pseudocodice dettagliato di heapify assumendo che l'heap è mantenuto con un vettore posizionale.

# Max-Heap e Min-Heap

e se volessi una struttura dati che mi permette di estrarre il **minimo** velocemente invece del **massimo**?

**Semplice:** costruisco un **min-heap** invertendo la proprietà di ordinamento delle chiavi. Cioè richiedo che

$$\text{chiave}(\text{padre}(v)) \leq \text{chiave}(v)$$

per ogni  $v$  (diverso dalla radice)

e come mai noi abbiamo progettato un max-heap e non un min-heap?

...fra un po' lo capiremo 😊

# L'algoritmo HeapSort

- Costruisce un heap tramite heapify
- Estrae ripetutamente il massimo per  $n-1$  volte
  - ad ogni estrazione memorizza il massimo nella posizione dell'array che si è appena liberata

heapSort (A)

1. Heapify(A)
2. Heapsize[A]=n
3. **for** i=n **down to** 2 **do**
4.     scambia A[1] e A[i]
5.     Heapsize[A] = Heapsize[A] - 1
6.     fixHeap(1,A)

}  $O(n)$   
n-1  
estrazioni  
di costo  
 $O(\log n)$

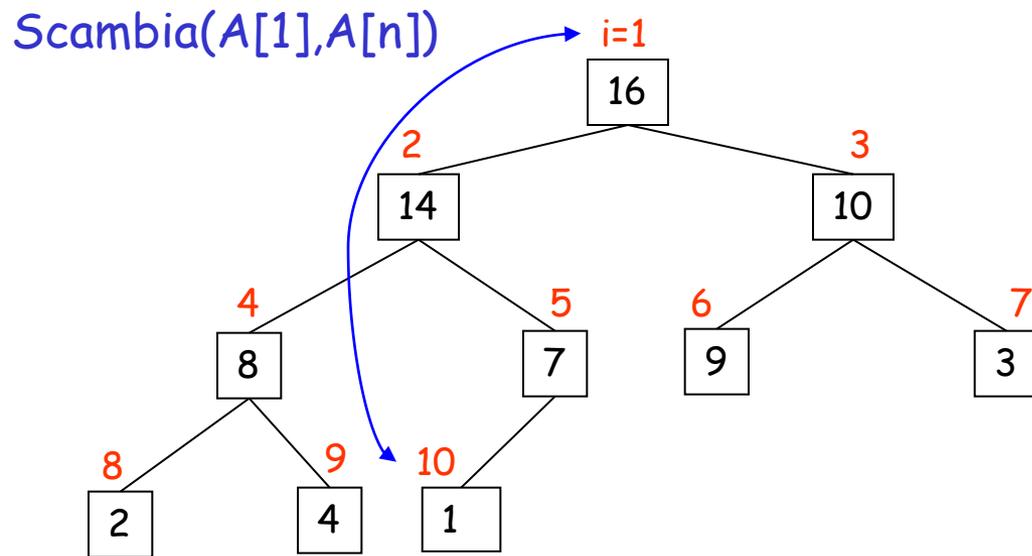


ordina in loco in tempo  $O(n \log n)$

# Esempio

Input:  $A = \langle 4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7 \rangle$

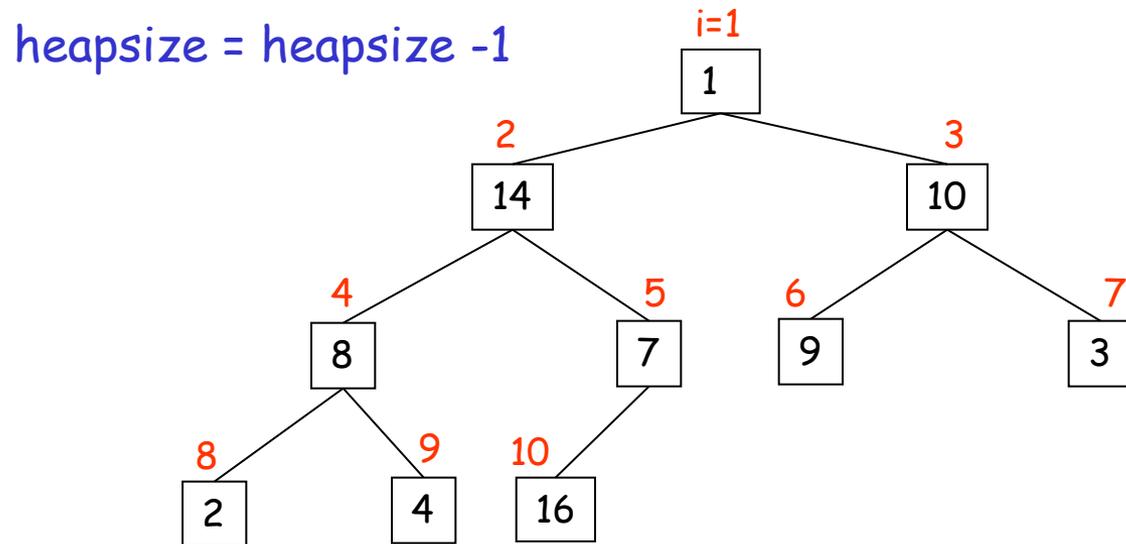
Heapify( $A$ )  $\rightarrow A_0 = \langle 16, 14, 10, 8, 7, 9, 3, 2, 4, 1 \rangle$



# Esempio

Input:  $A = \langle 4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7 \rangle$

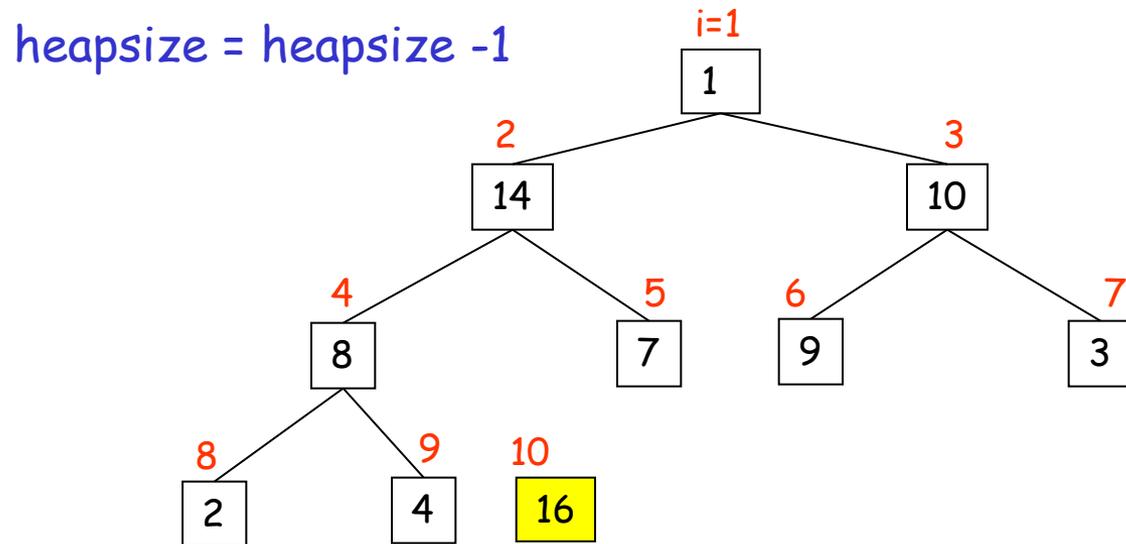
Heapify( $A$ )  $\rightarrow A_0 = \langle 16, 14, 10, 8, 7, 9, 3, 2, 4, 1 \rangle$



# Esempio

Input:  $A = \langle 4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7 \rangle$

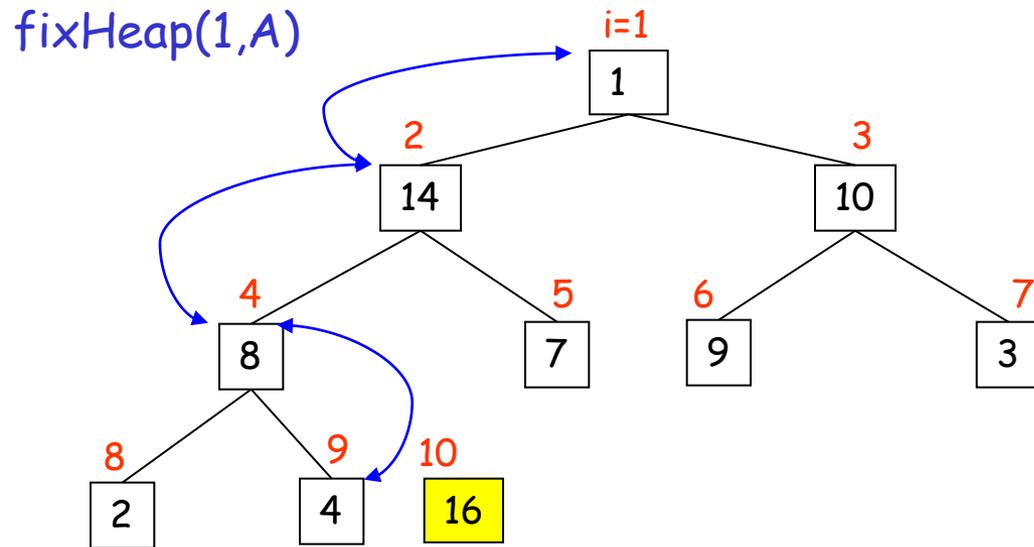
Heapify( $A$ )  $\rightarrow A_0 = \langle 16, 14, 10, 8, 7, 9, 3, 2, 4, 1 \rangle$



# Esempio

Input:  $A = \langle 4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7 \rangle$

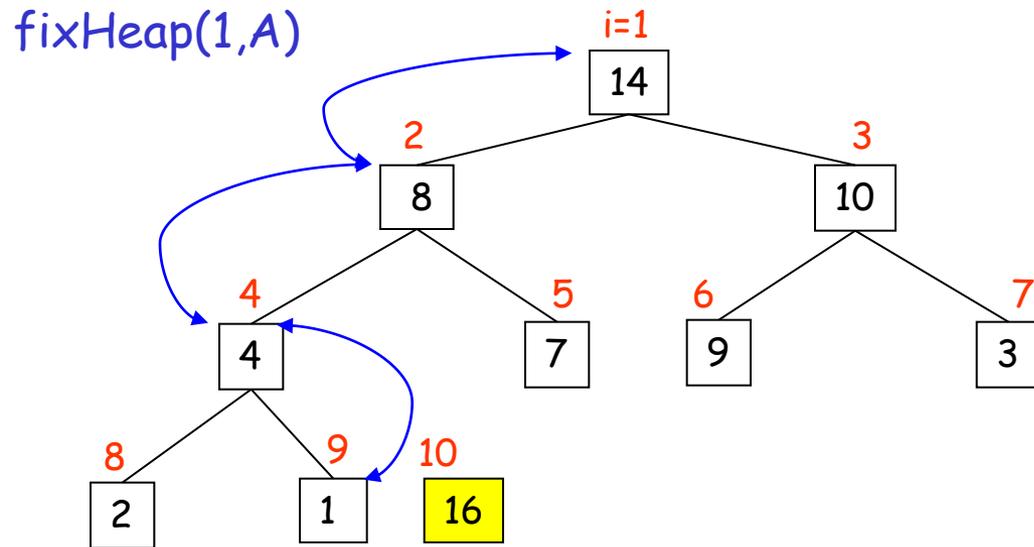
Heapify( $A$ )  $\rightarrow A_0 = \langle 16, 14, 10, 8, 7, 9, 3, 2, 4, 1 \rangle$



# Esempio

Input:  $A = \langle 4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7 \rangle$

Heapify( $A$ )  $\rightarrow A_0 = \langle 16, 14, 10, 8, 7, 9, 3, 2, 4, 1 \rangle$

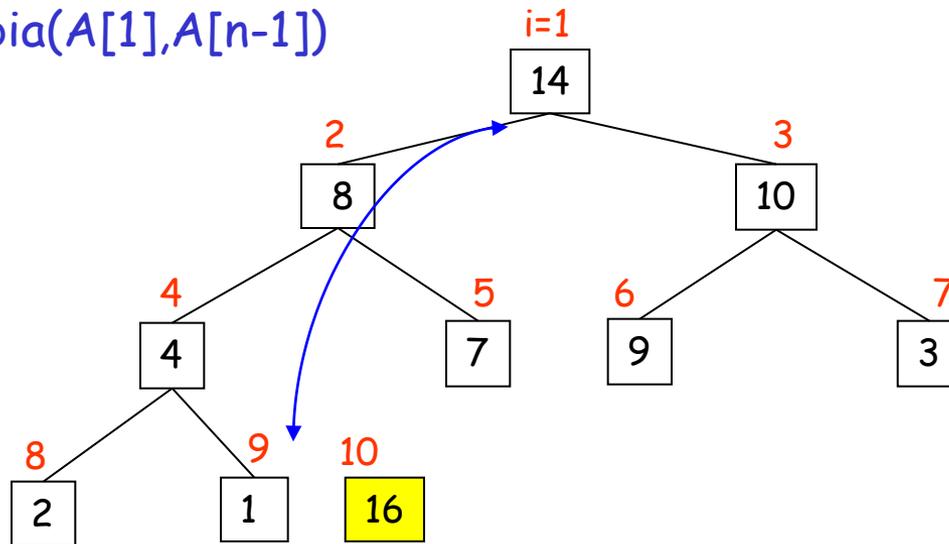


# Esempio

Input:  $A = \langle 4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7 \rangle$

Heapify( $A$ )  $\rightarrow A_0 = \langle 16, 14, 10, 8, 7, 9, 3, 2, 4, 1 \rangle$

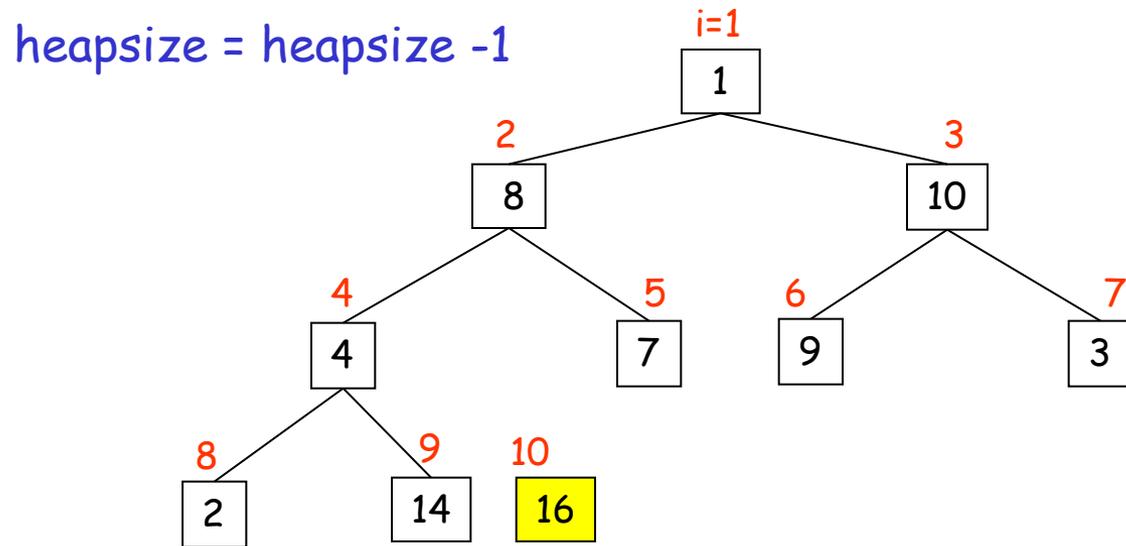
Scambia( $A[1], A[n-1]$ )



# Esempio

Input:  $A = \langle 4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7 \rangle$

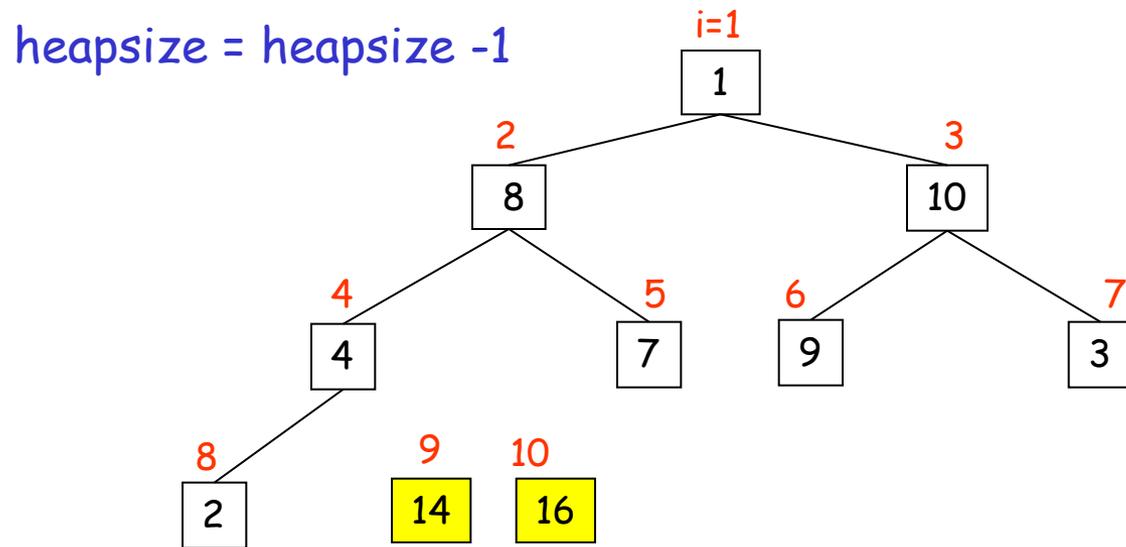
Heapify( $A$ )  $\rightarrow A_0 = \langle 16, 14, 10, 8, 7, 9, 3, 2, 4, 1 \rangle$



# Esempio

Input:  $A = \langle 4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7 \rangle$

Heapify( $A$ )  $\rightarrow A_0 = \langle 16, 14, 10, 8, 7, 9, 3, 2, 4, 1 \rangle$

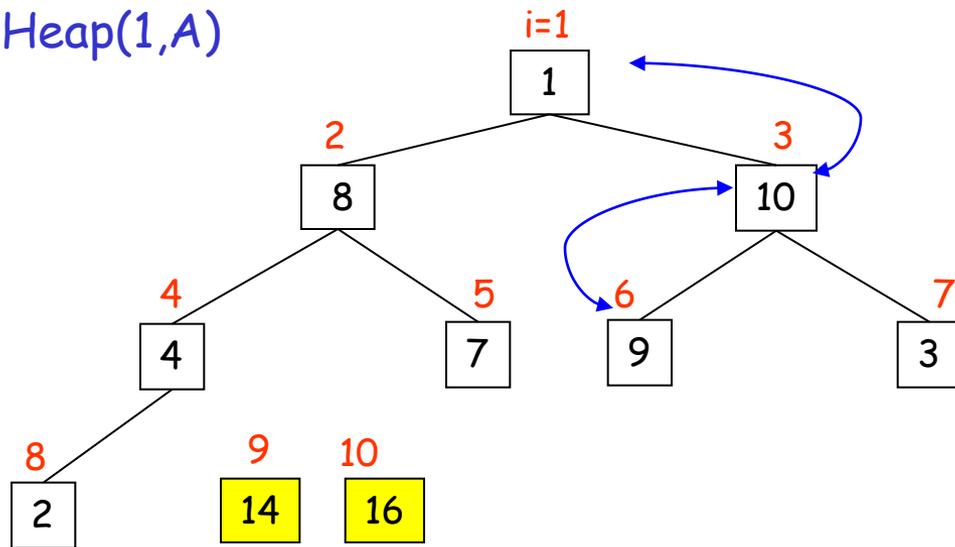


# Esempio

Input:  $A = \langle 4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7 \rangle$

Heapify( $A$ )  $\rightarrow A_0 = \langle 16, 14, 10, 8, 7, 9, 3, 2, 4, 1 \rangle$

fixHeap(1,  $A$ )

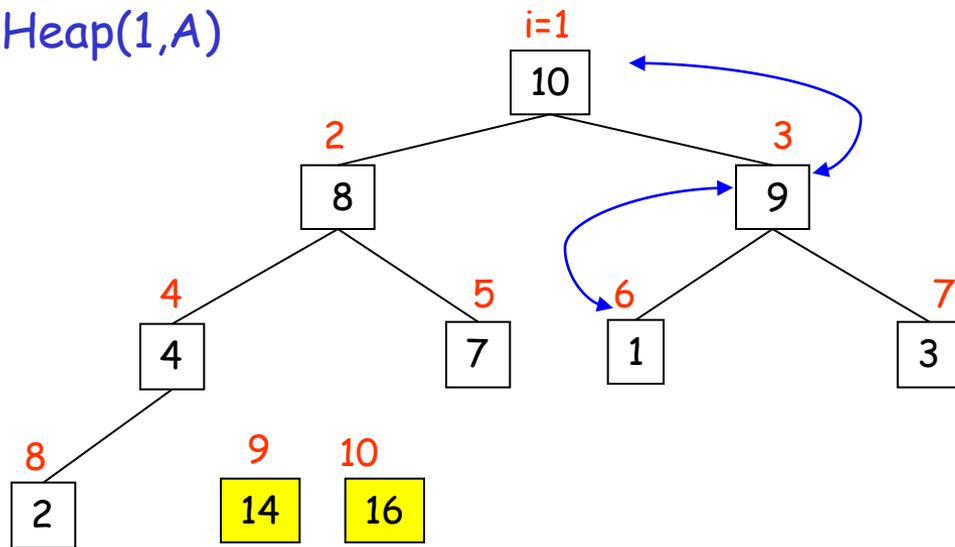


# Esempio

Input:  $A = \langle 4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7 \rangle$

Heapify( $A$ )  $\rightarrow A_0 = \langle 16, 14, 10, 8, 7, 9, 3, 2, 4, 1 \rangle$

fixHeap(1,  $A$ )

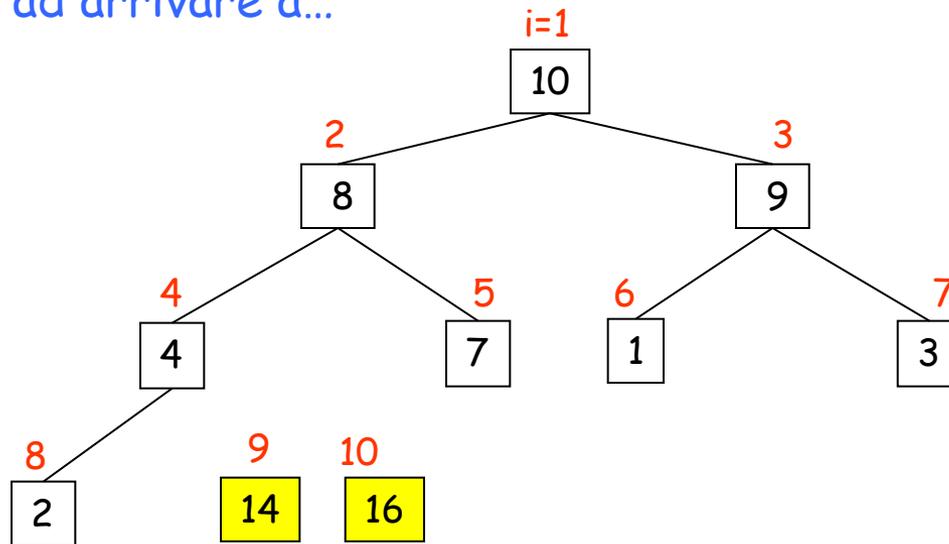


# Esempio

Input:  $A = \langle 4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7 \rangle$

Heapify( $A$ )  $\rightarrow A_0 = \langle 16, 14, 10, 8, 7, 9, 3, 2, 4, 1 \rangle$

E così via, sino ad arrivare a...

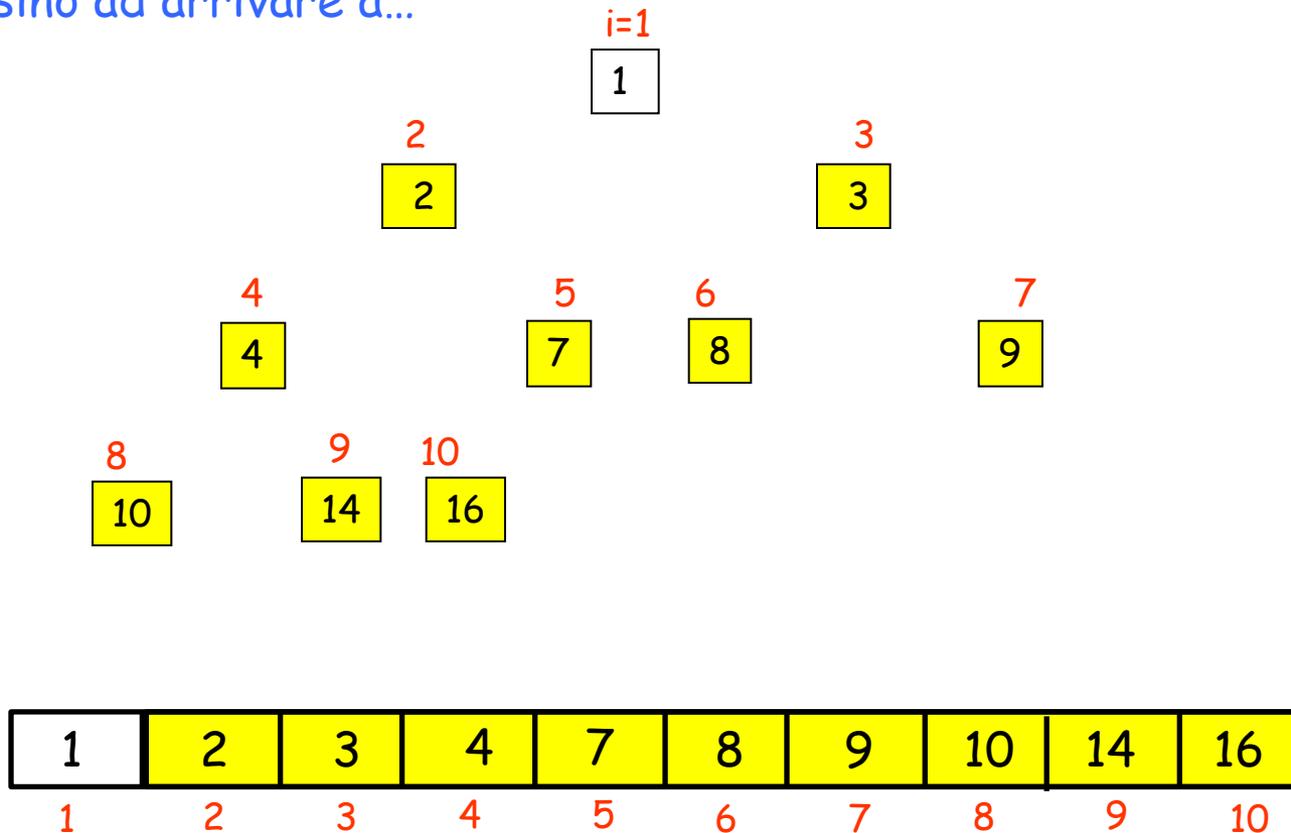


# Esempio

Input:  $A = \langle 4, 1, 3, 2, 16, 9, 10, 14, 8, 7 \rangle$

Heapify( $A$ )  $\rightarrow A_0 = \langle 16, 14, 10, 8, 7, 9, 3, 2, 4, 1 \rangle$

E così via, sino ad arrivare a...



# Max-Heap e Min-Heap

Quindi: come mai abbiamo usato un max-heap e non un min-heap? Potevamo usare anche un min-heap?

...l'uso del max-heap (implementato con un vettore posizionale) ci permette di usare solo memoria ausiliare costante! 😊

## Teorema

L'algoritmo **HeapSort** ordina *in loco* un array di lunghezza  $n$  in tempo  $O(n \log n)$  nel caso peggiore.