Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 4
Ordinamento

Ordinamento

Dato un insieme S di n oggetti presi da un dominio totalmente ordinato, ordinare S

- Esempi: ordinare una lista di nomi alfabeticamente, o un insieme di numeri, o un insieme di compiti d'esame in base al cognome dello studente
- Subroutine in molti problemi
- E' possibile effettuare ricerche in array ordinati in tempo $O(\log n)$

Il problema dell'ordinamento

- **Input:** una sequenza di *n* numeri $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$
- **Output:** una permutazione (riarrangiamento) $\langle a_1', a_2', \ldots, a_n' \rangle$ della sequenza di input tale che $a_1' \leq a_2' \leq \ldots \leq a_n'$

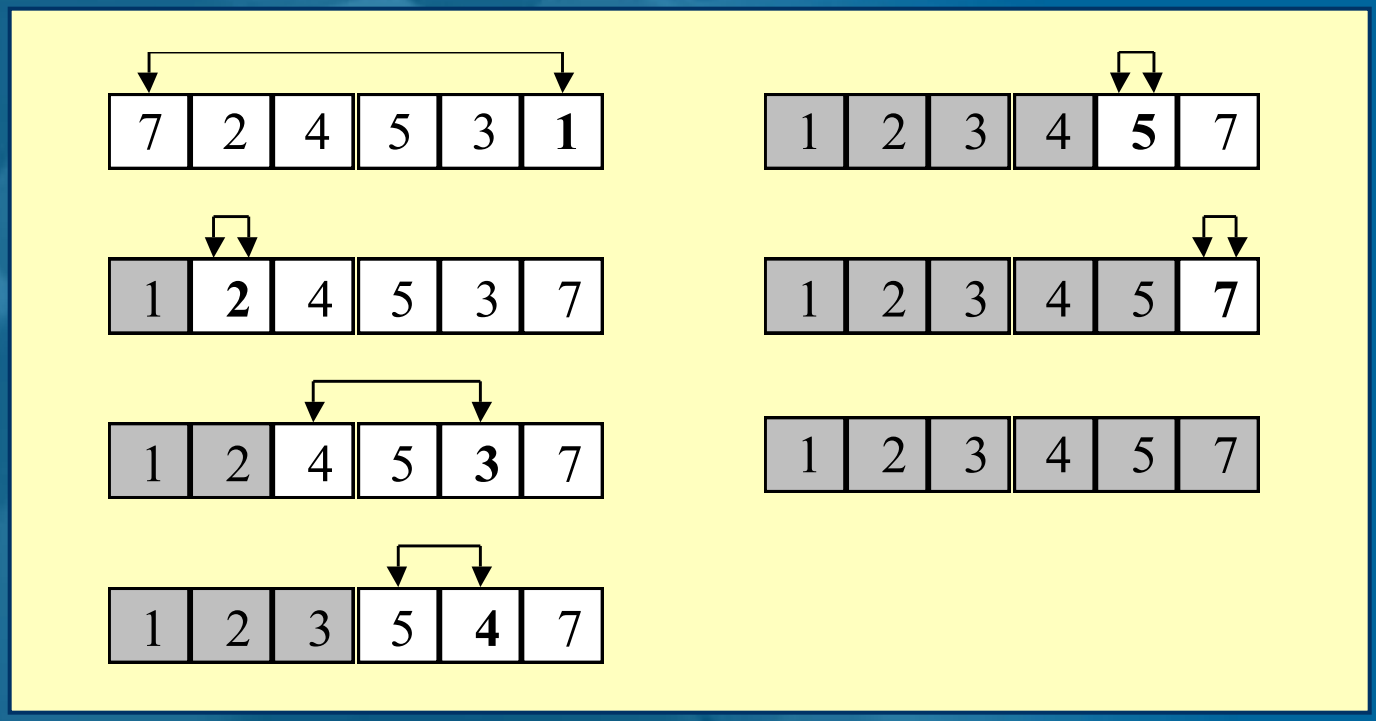
Ordinare in tempo quadratico

Un algoritmo semplice, intuitivo, facile da programmare.

E inefficiente.

SelectionSort

Approccio incrementale: estende l'ordinamento da k a k+1 elementi, scegliendo il minimo degli n-k elementi non ancora ordinati e mettendolo in posizione k+1



```
SelectionSort (A)
1.    for k=0 to n-2 do
2.        m = k+1
3.        for j=k+2 to n do
4.            if (A[j] < A[m]) then m=j
5.        scambia A[m] con A[k+1]
```

- al generico passo k, A[1],…,A[k] sono già ordinati
- linee 2-4: ricerca del minimo fra gli elementi A[k+1],…,A[n]
- m è l'indice dell'array in cui si trova il minimo
- il minimo è messo in posizione k+1

Corretto?

- E' facile convincersi che l'algoritmo mantiene le seguenti *invarianti*: dopo il generico passo k (k=0,…,*n*-2) abbiamo che:
  - (i) i primi k+1 elementi sono ordinati e
  - (ii) sono i k+1 elementi più piccoli dell'array

Suggerimento: ragionare per invarianti è uno strumento utile per dimostrare la correttezza di un algoritmo, perché permette di isolare proprietà dell'algoritmo, spiegarne il funzionamento, capire a fondo l'idea su cui si basa.

Complessità temporale (analisi)

$T(n) =$ #operazioni elementari sul modello RAM a costi uniformi eseguite dall'algoritmo nel caso peggiore su istanze di dimensione n.

Complessità: un upper bound

```
SelectionSort (A)
1.    for k=0 to n-2 do
2.        m = k+1
3.        for j=k+2 to n do
4.            if (A[j] < A[m]) then m=j
5.        scambia A[m] con A[k+1]
```

eseguite al più n volte per ogni ciclo esterno

ciclo esterno eseguito al più n volte

ogni linea di codice costa tempo O(1)

$T(n) \leq 5\, n^2\, O(1) = \Theta(n^2)$ ⇒ $T(n) = O(n^2)$

L'analisi è stretta? Cioè, T(n) è $\Theta(n^2)$?

Complessità: un lower bound

```
SelectionSort (A)
1.    for k=0 to n-2 do
2.        m = k+1
3.        for j=k+2 to n do
4.            if (A[j] < A[m]) then m=j
5.        scambia A[m] con A[k+1]
```

Idea: conto solo i confronti fra elementi

} n-k-1 confronti

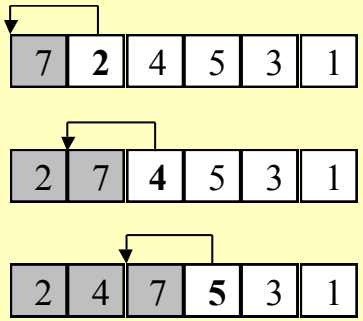
$$T(n) \geq \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1)/2 = \Theta(n^2)$$

$$\Rightarrow \quad T(n) = \Omega(n^2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(n) = \Theta(n^2)}$$

altri algoritmi di ordinamento con tempo $O(n^2)$

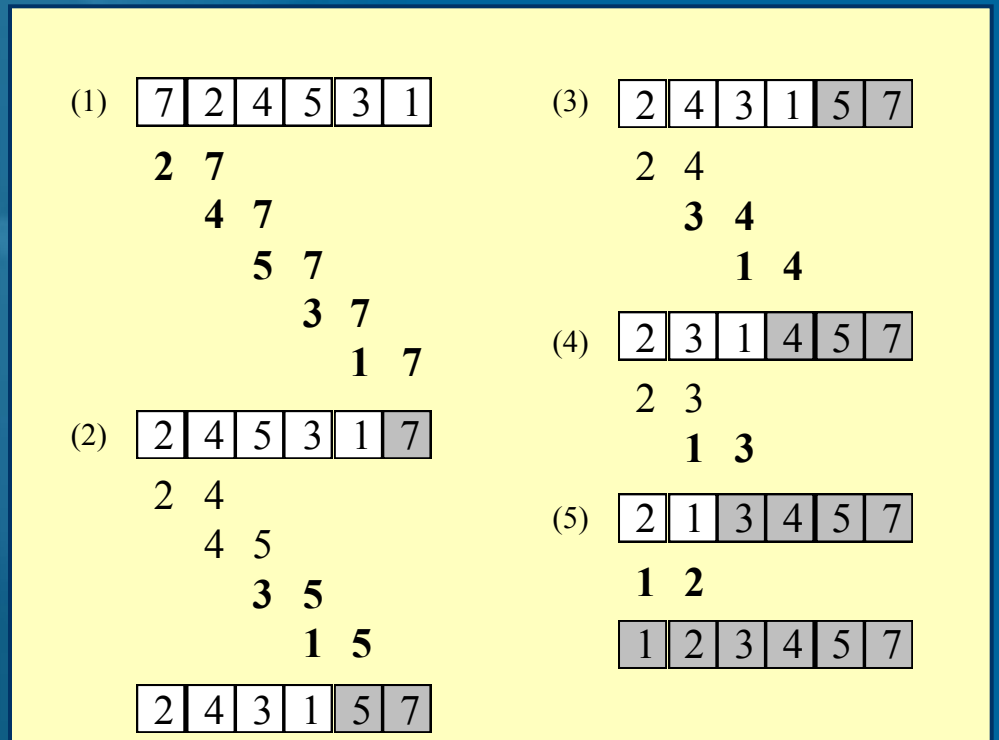
Insertion Sort

Approccio incrementale: estende l'ordinamento da k a k+1 elementi, posizionando l'elemento (k+1)-esimo nella posizione corretta rispetto ai primi k elementi



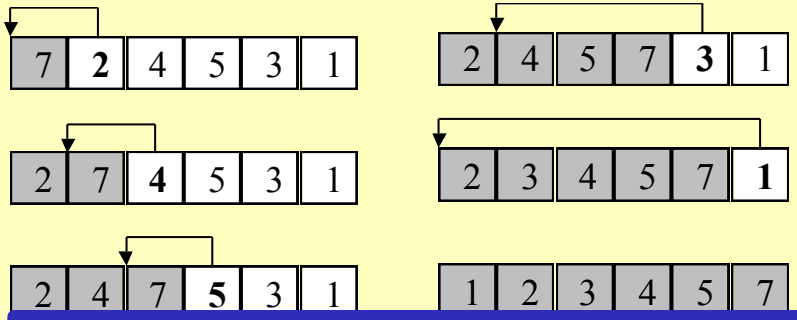
Bubble Sort

Approccio incrementale: esegue n-1 scansioni. Ad ogni scansione guarda coppie di elementi adiacenti e li scambia se non sono nell'ordine corretto.



Insertion Sort

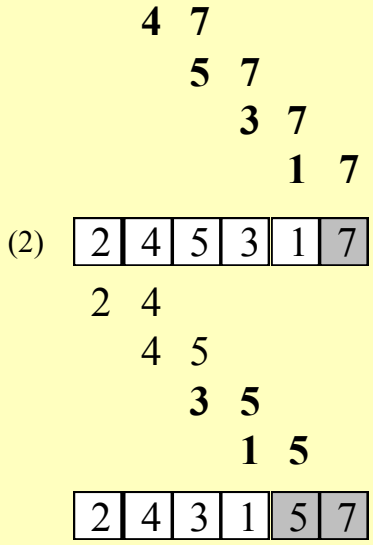
Approccio incrementale: estende l'ordinamento da k a k+1 elementi, posizionando l'elemento (k+1)-

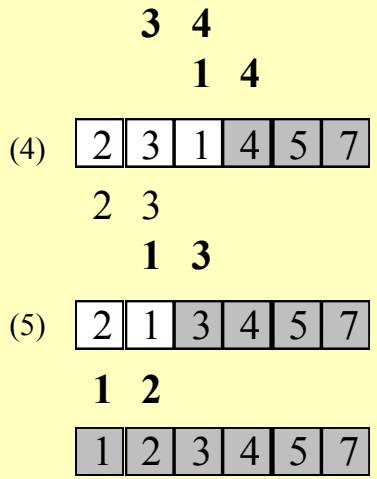


Esercizio

Scrivere lo pseudocodice dei due algoritmi e fare l'analisi della complessità temporale nel caso peggiore.

Approccio incrementale: esegue n-1 scansioni. Ad ogni scansione guarda coppie di elementi adiacenti e li scambia se non sono nell'ordine corretto.





Ordinare in tempo meno che quadratico

Un algoritmo semplice, un po' meno intuitivo, facile da programmare.

E temporalmente efficiente.

Tecnica: Divite et Impera

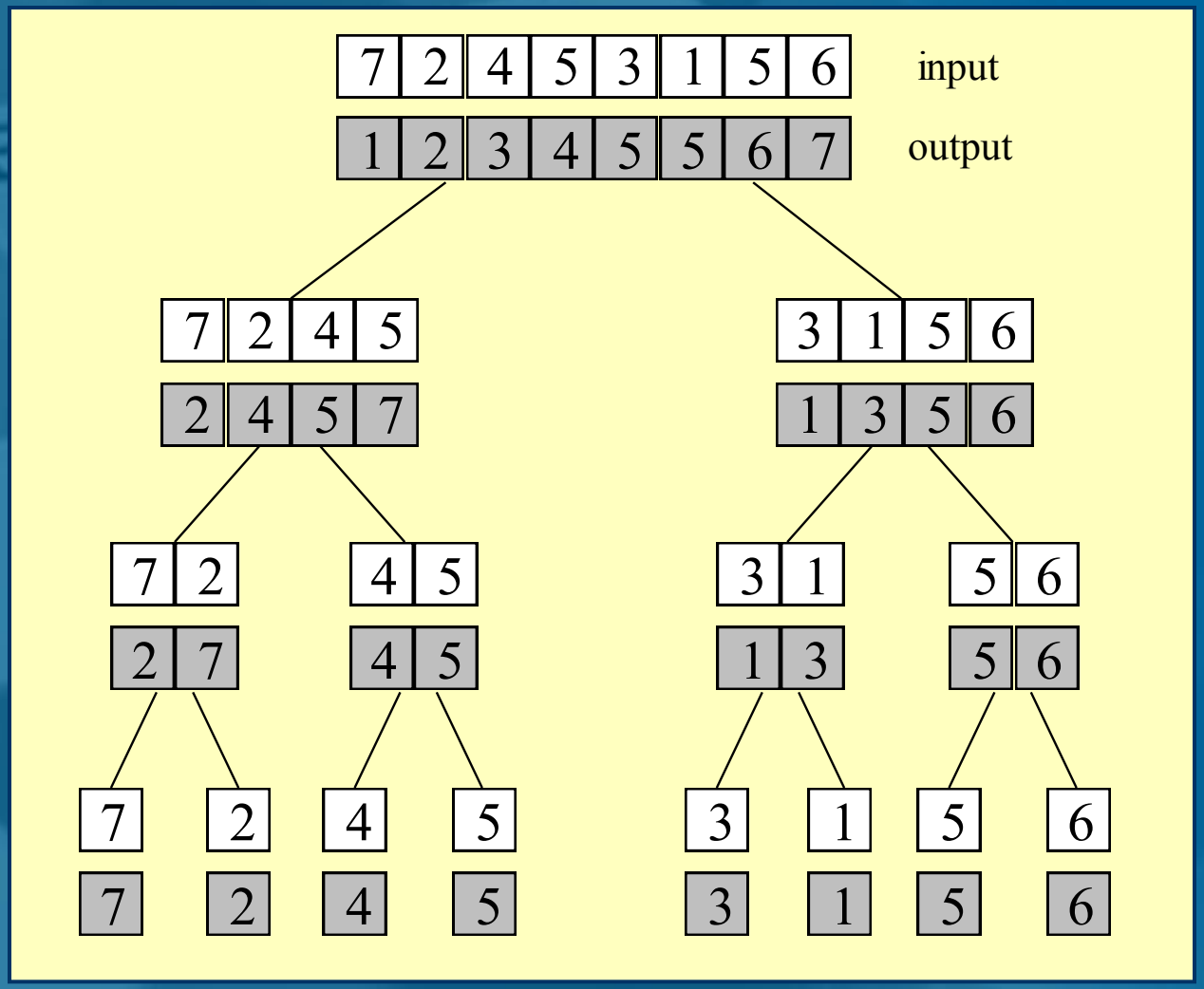
MergeSort

- Usa la tecnica del divide et impera:

1. Divide: dividi l'array a metà
2. Risolvi i due sottoproblemi ricorsivamente
3. Impera: fondi le due sottosequenze ordinate

```
MergeSort (A, i, f)
1.    if (i < f) then
2.        m = ⌊(i+f)/2⌋
3.        MergeSort(A,i,m)
4.        MergeSort(A,m+1,f)
5.        Merge(A,i,m,f)
```

Esempio di esecuzione

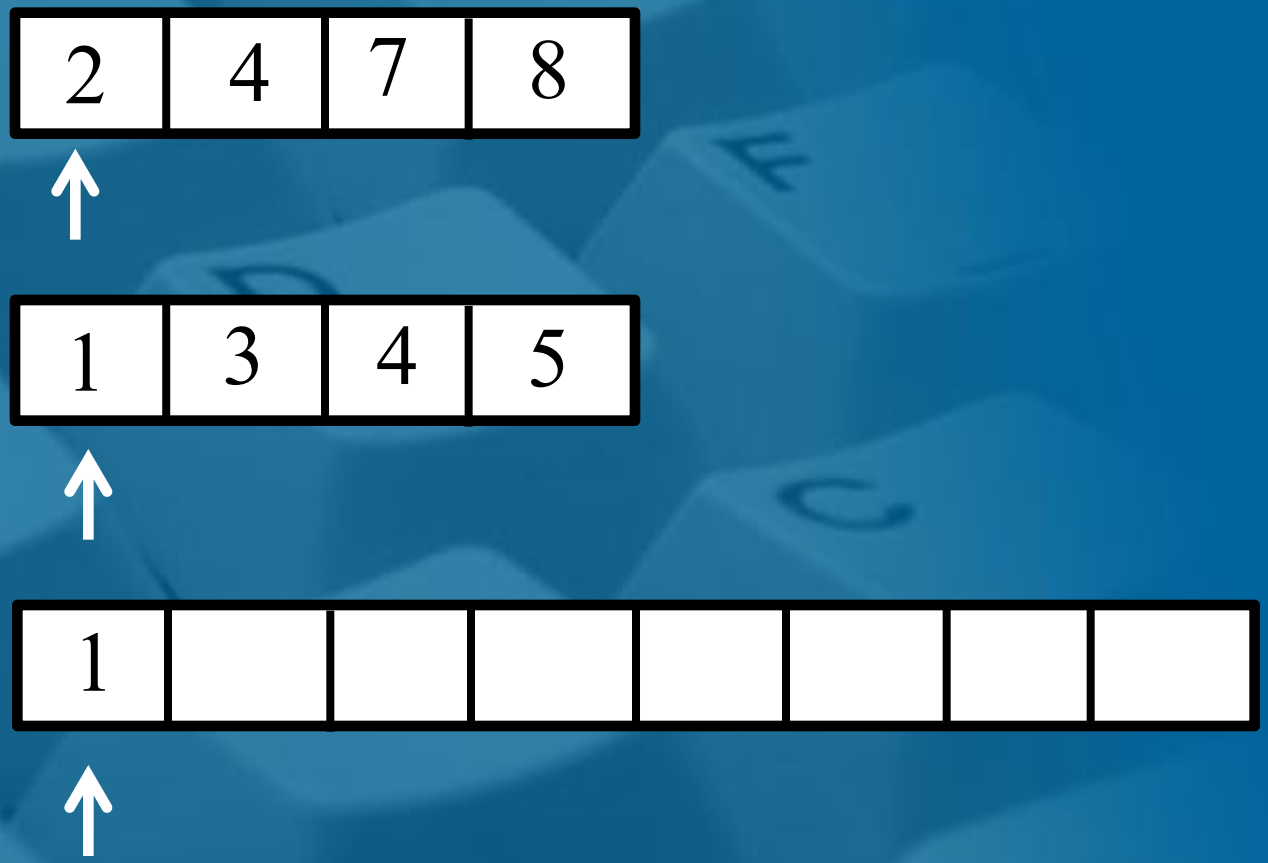


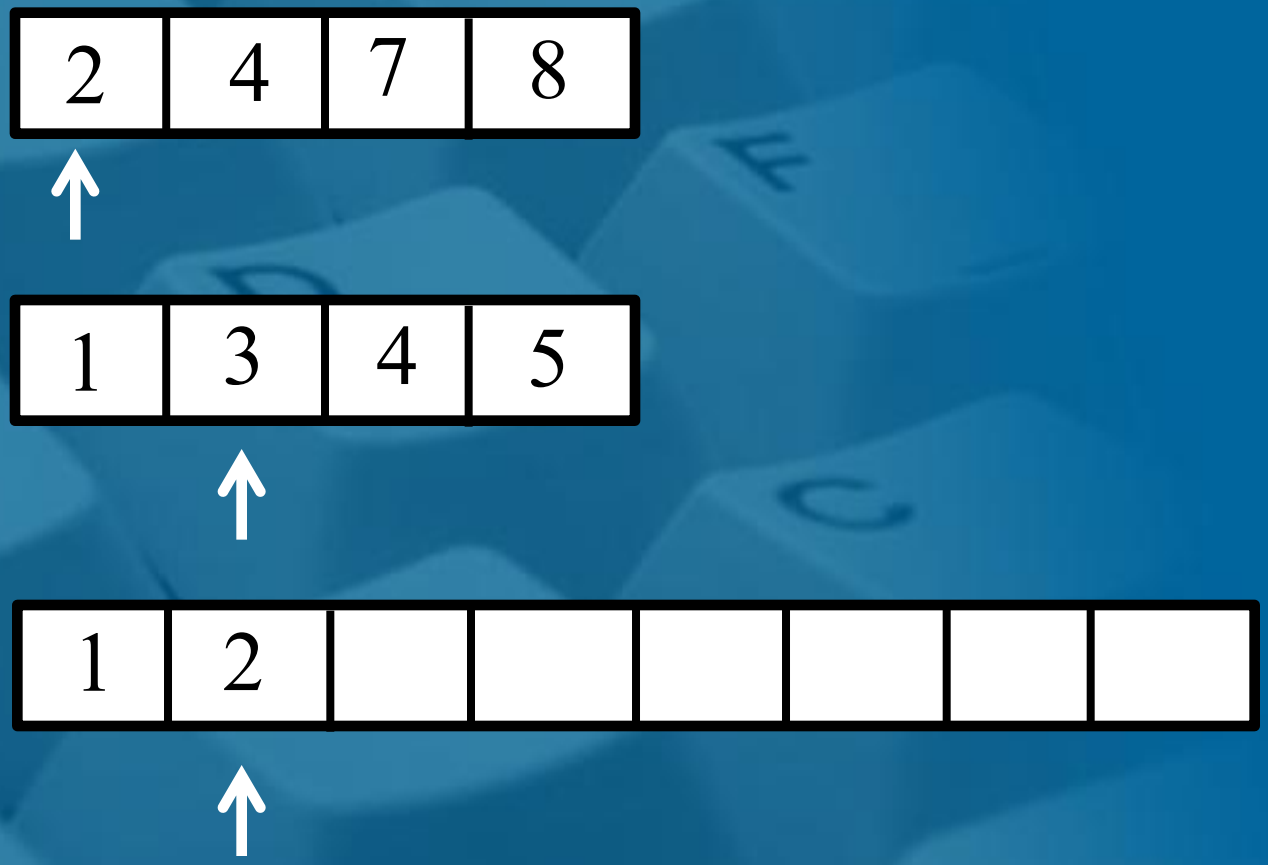
Albero delle chiamate ricorsive

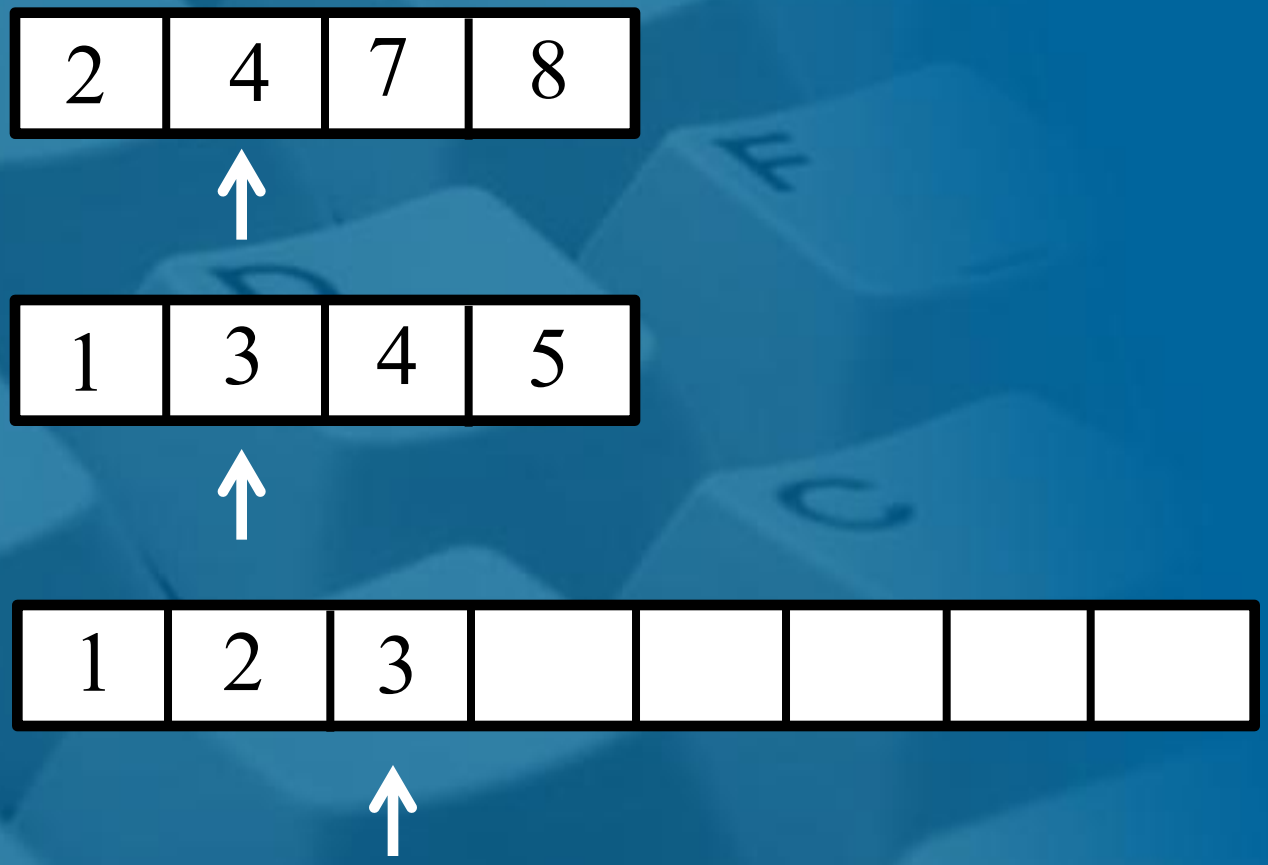
Procedura Merge

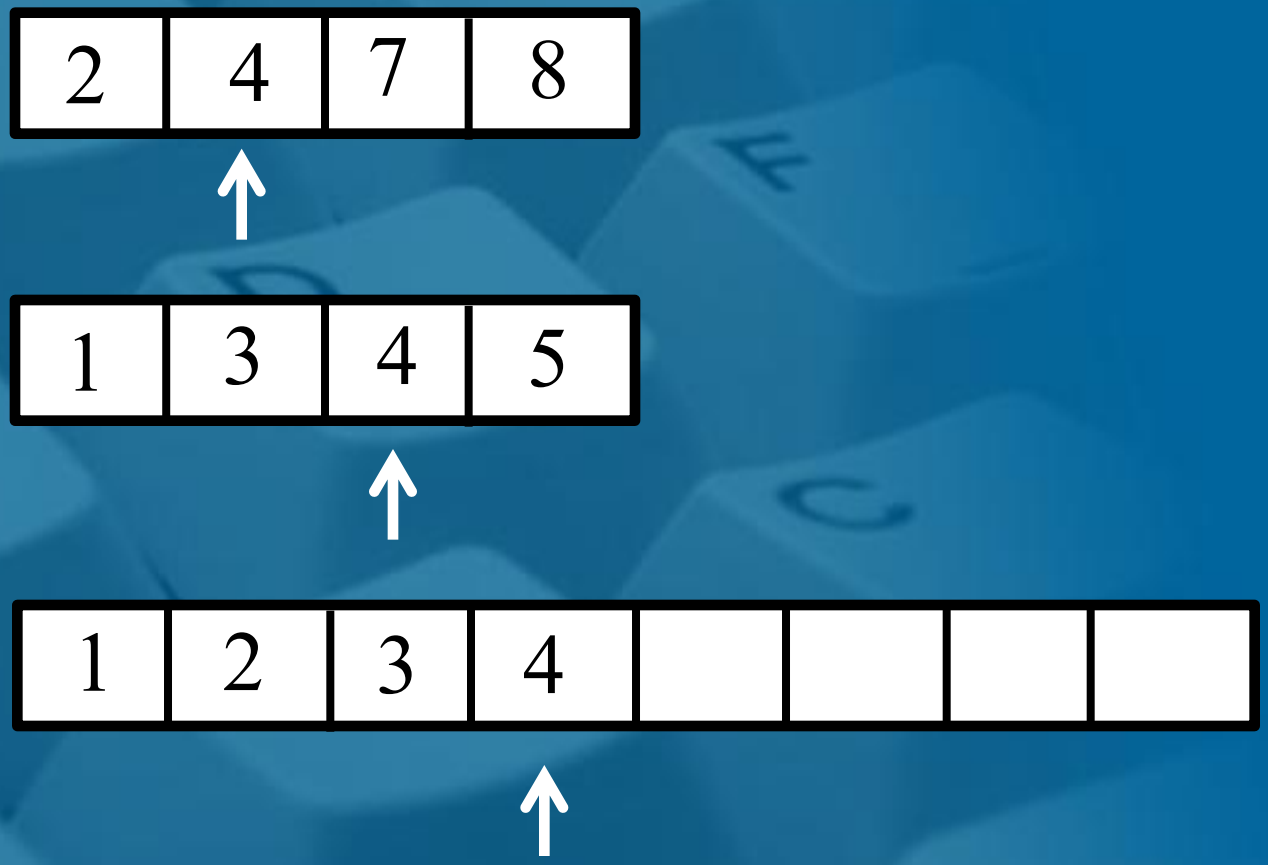
- Due array ordinati A e B possono essere fusi rapidamente:
  - estrai ripetutamente il minimo di A e B e copialo nell'array di output, finché A oppure B non diventa vuoto
  - copia gli elementi dell'array non vuoto alla fine dell'array di output

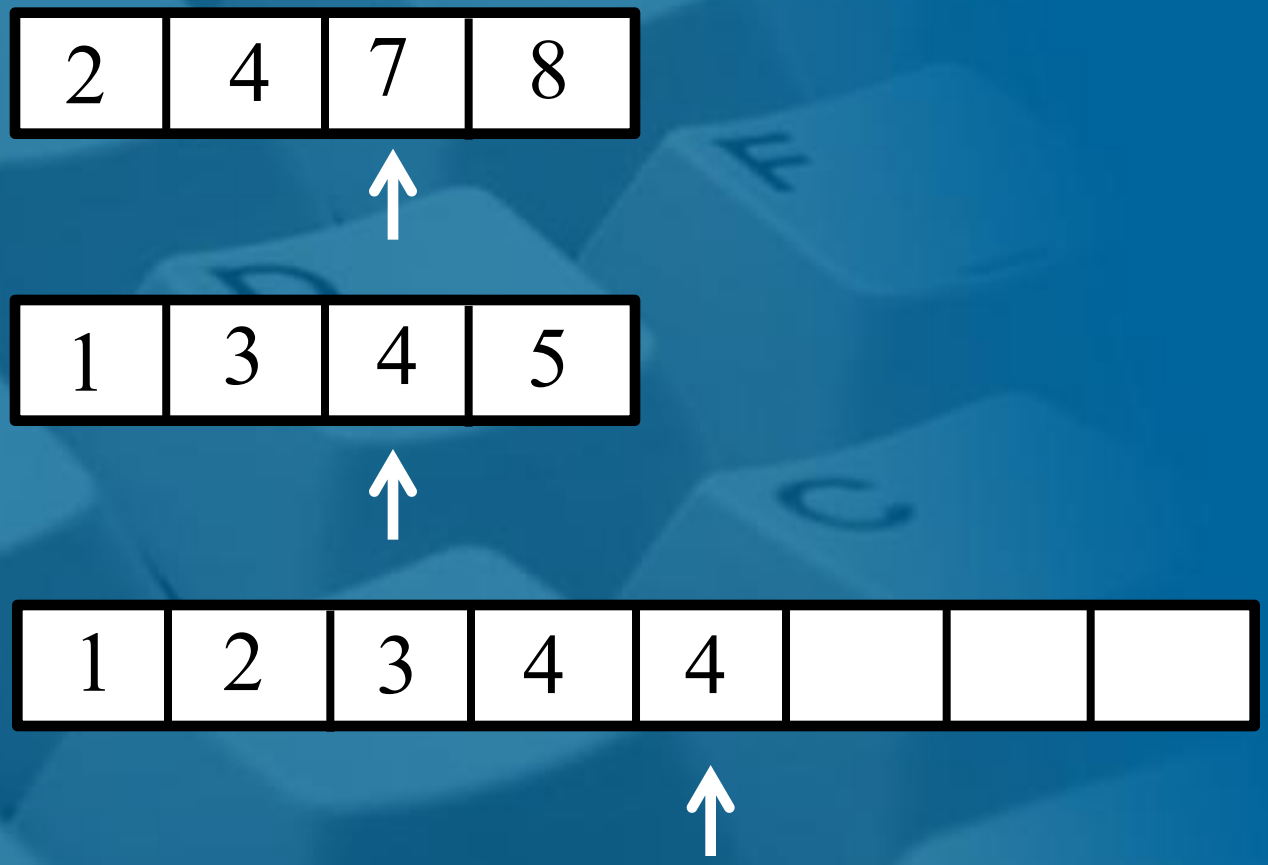
Notazione: dato un array A e due indici $x \leq y$, denotiamo con A[x;y] la porzione di A costituita da A[x], A[x+1],…,A[y]

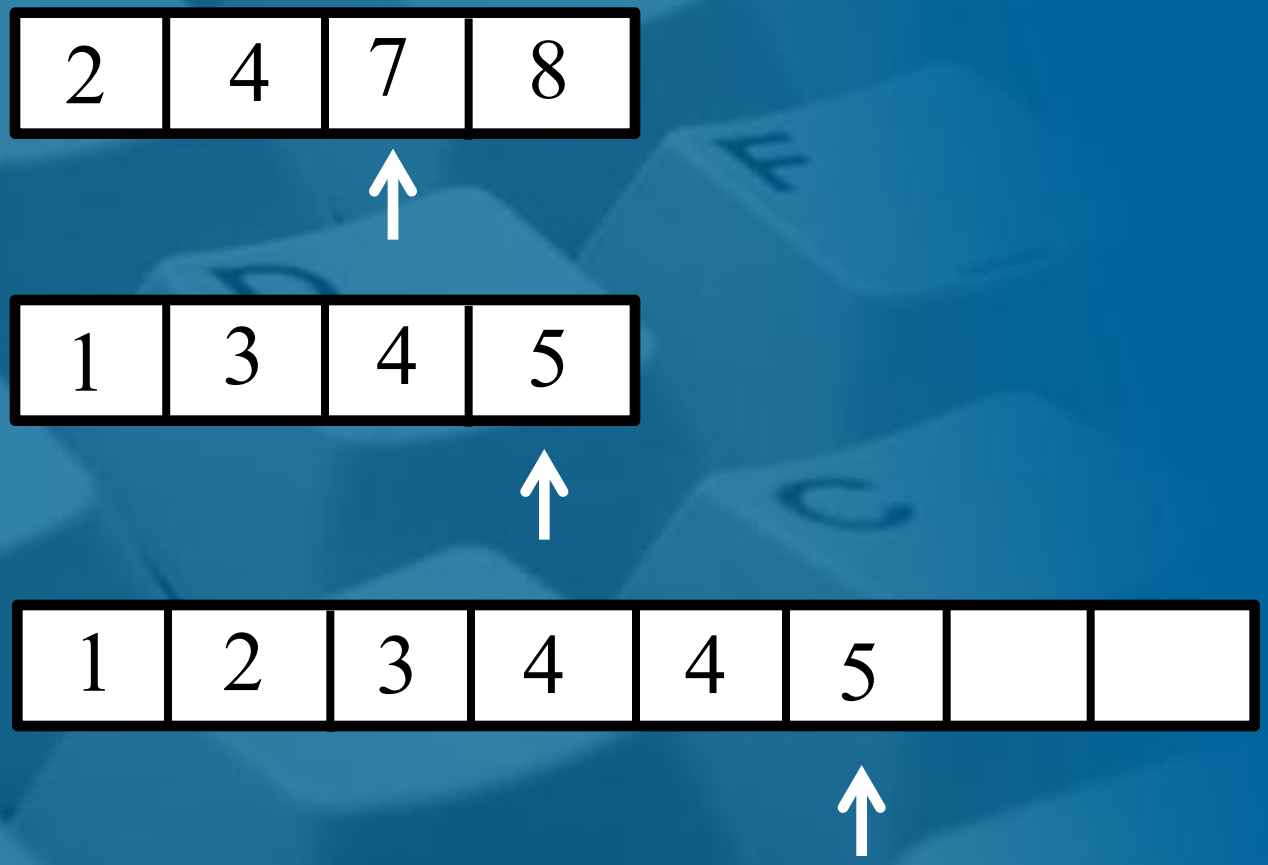

2
4
7
8
1
3
4
5
1

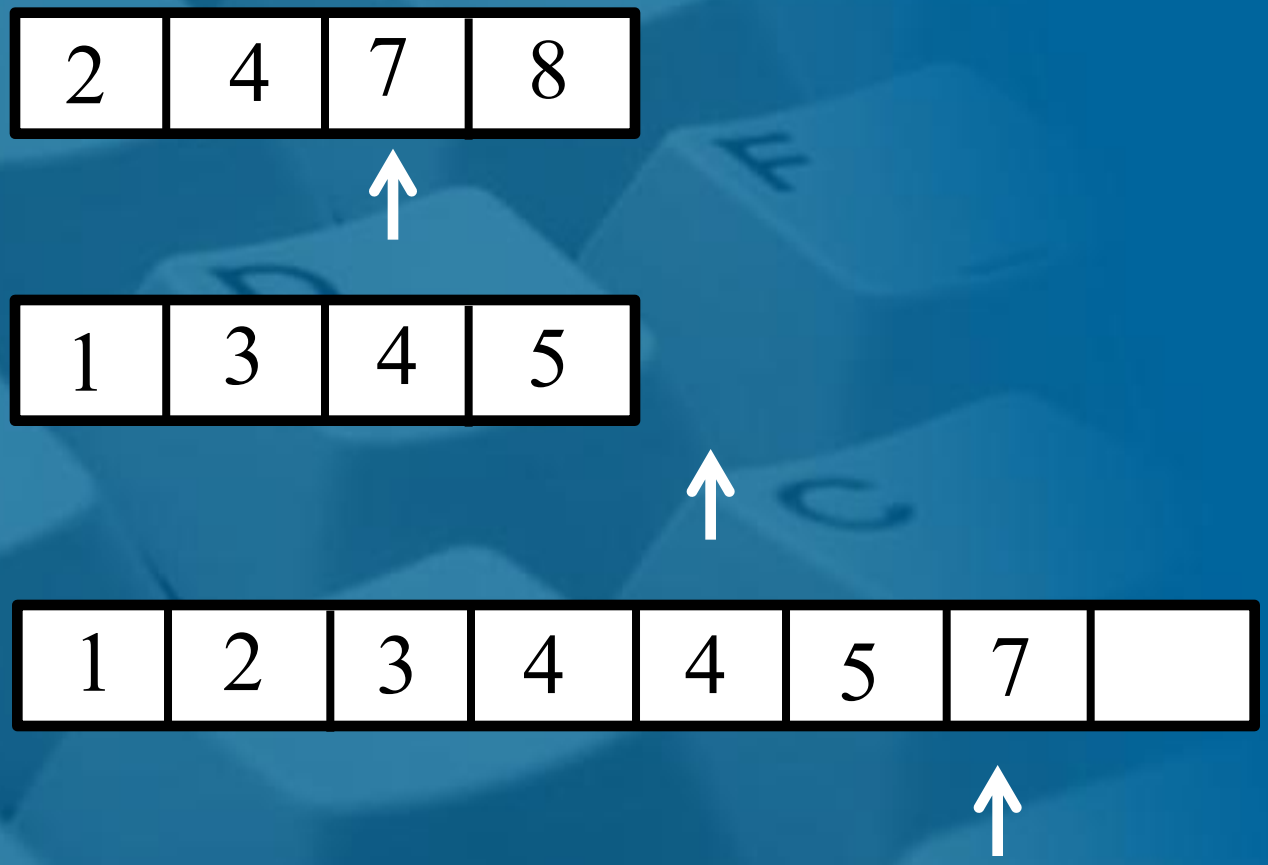

2 4 7 8
1 3 4 5
1 2

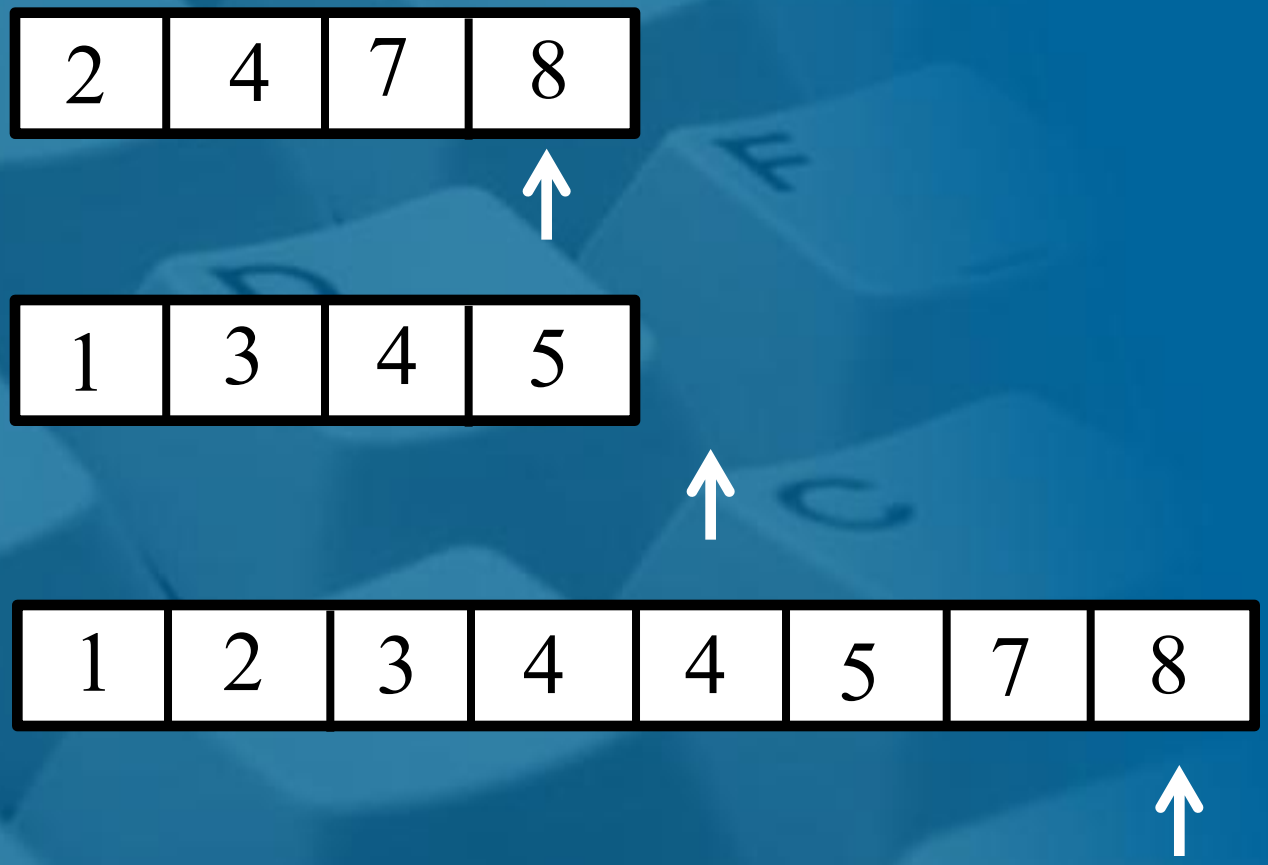

2 4 7 8
1 3 4 5
1 2 3

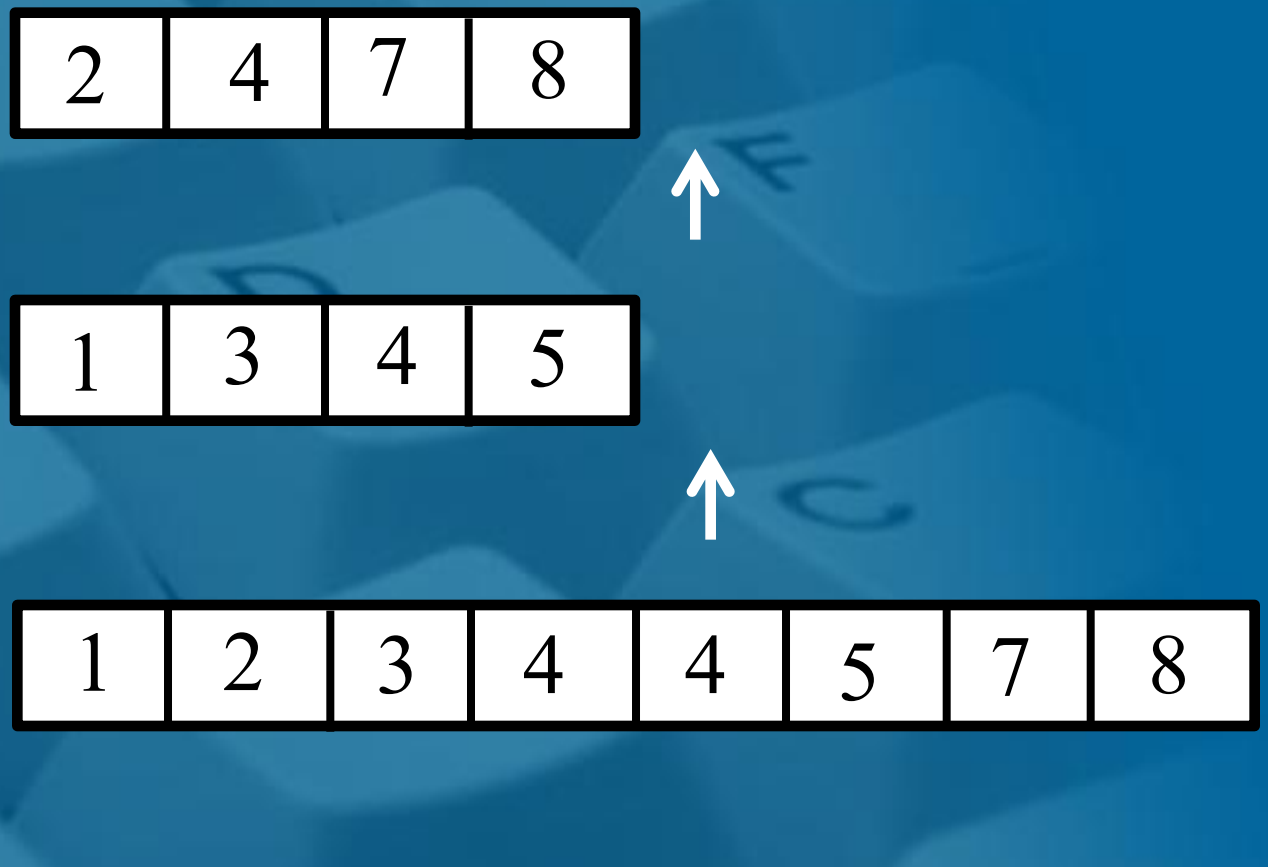

2 4 7 8
1 3 4 5
1 2 3 4


2 4 7 8
1 3 4 5
1 2 3 4 4


2 4 7 8
1 3 4 5
1 2 3 4 4 5


2 4 7 8
1 3 4 5
1 2 3 4 4 5 7


2 4 7 8
1 3 4 5
1 2 3 4 4 5 7 8


2 4 7 8
1 3 4 5
1 2 3 4 4 5 7 8

```
Merge (A, i1, f1, f2)
1.   Sia X un array ausiliario di lunghezza f2-i1+1
2.   i=1; k1=i1
3.   k2=f1+1
4.   while (k1≤ f1 e k2 ≤ f2) do
5.        if (A[k1] ≤ A[k2])
6.        then X[i]=A[k1]
7.             incrementa i e k1
8.        else X[i]=A[k2]
9.             incrementa i e k2
10.  if (k1≤f1) then copia A[k1;f1] alla fine di X
11.  else copia A[k2;f2] alla fine di X
12.  copia X in A[i1;f2]
```

fonde $A[i_1;f_1]$ e $A[f_1+1;f_2]$ output in $A[i_1;f_2]$

Osservazione: sto usando un array ausiliario

Lemma

La procedure Merge fonde due sequenze ordinate di lunghezza n_1 e n_2 in tempo $\Theta(n_1 + n_2)$.

dim

Ogni confronto "consuma" un elemento di una delle due sequenze. Ogni posizione di X è riempita in tempo costante. Il numero totale di elementi è $n_1 + n_2$. ■

```
MergeSort (A, i, f)
1.    if (i < f) then
2.        m = ⌊(i+f)/2⌋
3.        MergeSort(A,i,m)
4.        MergeSort(A,m+1,f)
5.        Merge(A,i,m,f)
```

Tempo di esecuzione

- La complessità temporale del MergeSort è descritto dalla seguente relazione di ricorrenza:

$$T(n) = 2\,T(n/2) + O(n)$$

- Usando il Teorema Master si ottiene

$$T(n) = O(n \log n)$$

$a=b=2$, $f(n)=O(n)$ → caso 2

Quanta memoria (ausiliaria) usiamo?

- La complessità spaziale del MergeSort è $\Theta(n)$
  - la procedura Merge usa memoria ausiliaria pari alla dimensione di porzione da fondere;
  - non sono mai attive due procedure di Merge contemporaneamente;
  - ogni chiamata di MergeSort usa memoria costante (esclusa quella usata dalla procedura Merge);
  - numero di chiamate di MergeSort attive contemporaneamente sono $O(\log n)$;

- Il MergeSort non ordina *in loco*
  - occupazione di memoria ausiliaria (oltre input) pari a $\Theta(n)$

Ancora un algoritmo di ordinamento che usa la tecnica del *divide et impera*: il Quick Sort

Efficiente?

Caso peggiore, caso medio e versione randomizzata

QuickSort

- Usa la tecnica del divide et impera:

1 Divide: scegli un elemento x della sequenza (perno) e partiziona la sequenza in elementi $\leq$ x ed elementi >x

2 Risolvi i due sottoproblemi ricorsivamente

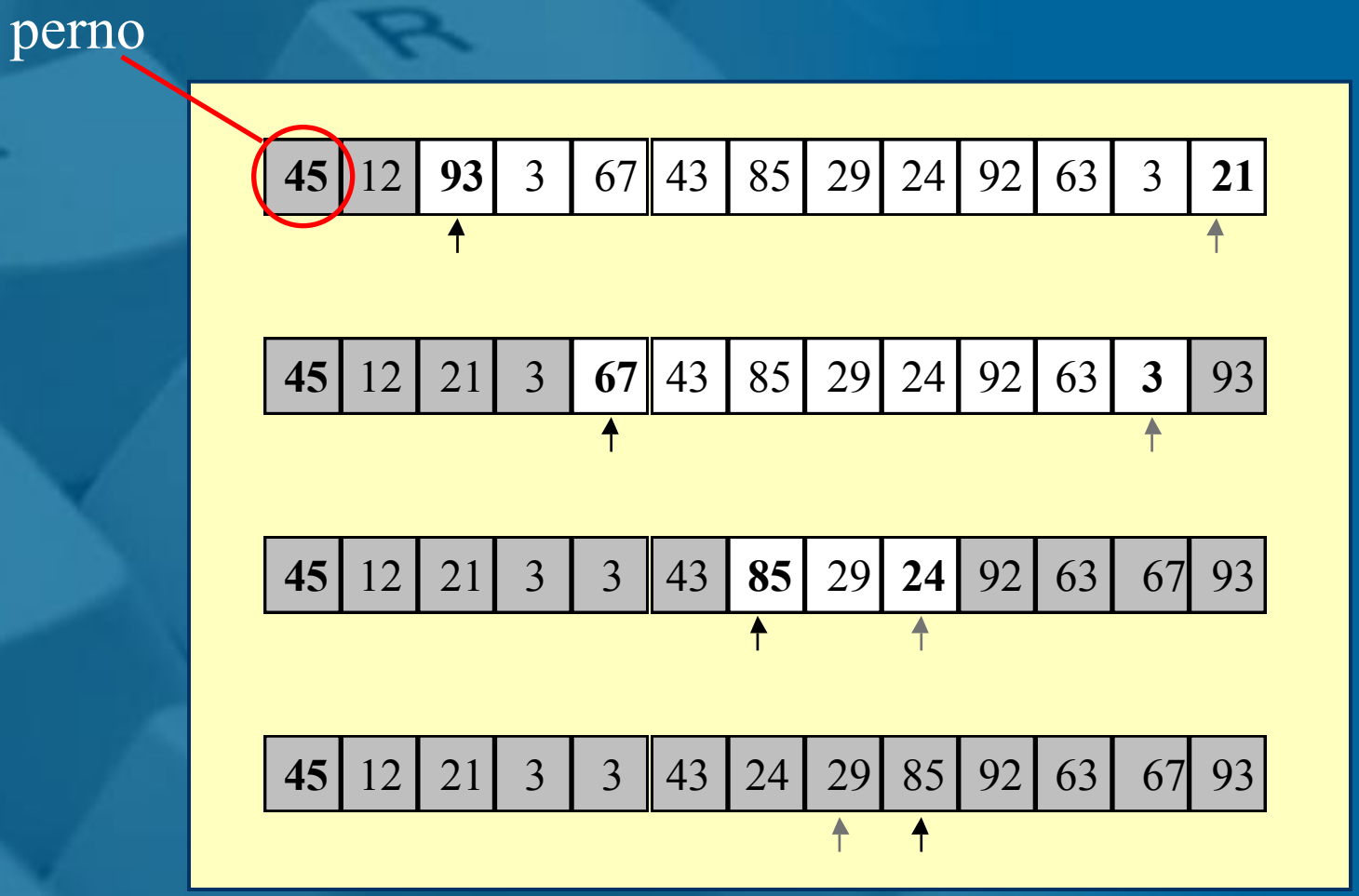
3 Impera: restituisci la concatenazione delle due sottosequenze ordinate

Rispetto al MergeSort, divide complesso ed impera semplice

Partizione (in loco)

- Scegli il perno
- Scorri l'array "in parallelo" da sinistra verso destra e da destra verso sinistra
  - da sinistra verso destra, ci si ferma su un elemento maggiore del perno
  - da destra verso sinistra, ci si ferma su un elemento minore del perno
- Scambia gli elementi e riprendi la scansione

Partizione in loco: un esempio



```
Partition (A, i, f )
1.    x=A[i]
2.    inf =i
3.    sup= f + 1
4.    while (true) do
5.        do (inf=inf + 1) while (inf ≤ f e A[inf] ≤ x)
6.        do (sup=sup-1) while (A[sup] > x)
7.        if (inf < sup) then scambia A[inf] e A[sup]
8.        else break
9.    scambia A[i] e A[sup]
10.   return sup
```

partiziona A[i;f] rispetto a A[i]

Tempo di esecuzione: O(n)

mette il perno "al centro"

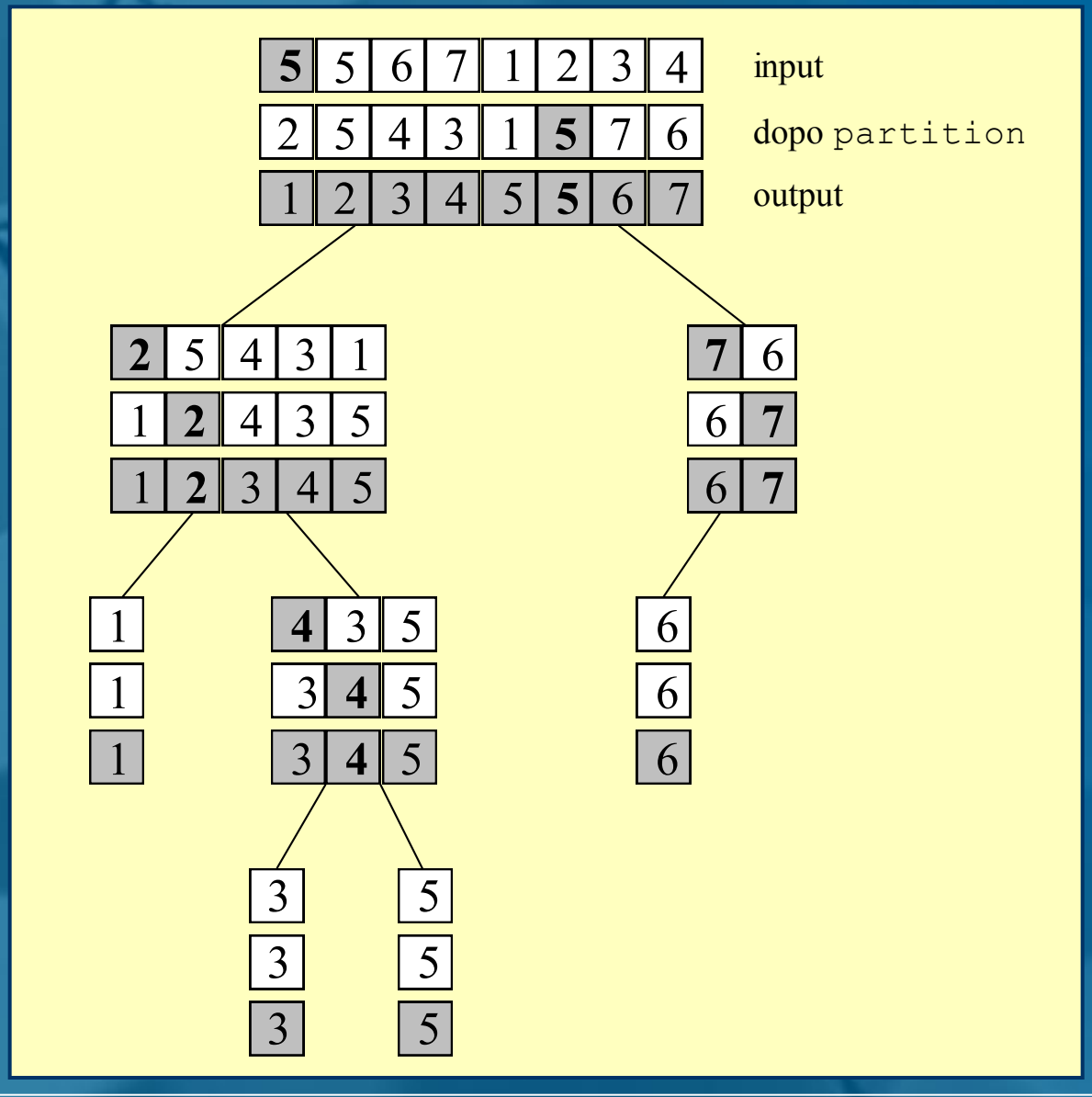
restituisce l'indice del "centro"

Proprietà (invariante):

In ogni istante, gli elementi A[i],…,A[inf-1] sono ≤ del perno, mentre gli elementi A[sup+1],…,A[f] sono > del perno

```
QuickSort (A, i, f )
1.    if (i < f) then
2.        m=Partition(A,i,f)
3.        QuickSort(A,i,m-1)
4.        QuickSort(A, m +1,f)
```

Esempio di esecuzione



L'albero delle chiamate ricorsive può essere sbilanciato

Analisi nel caso peggiore

- Nel caso peggiore, il perno scelto ad ogni passo è il minimo o il massimo degli elementi nell'array
- La complessità nel caso peggiore è pertanto:

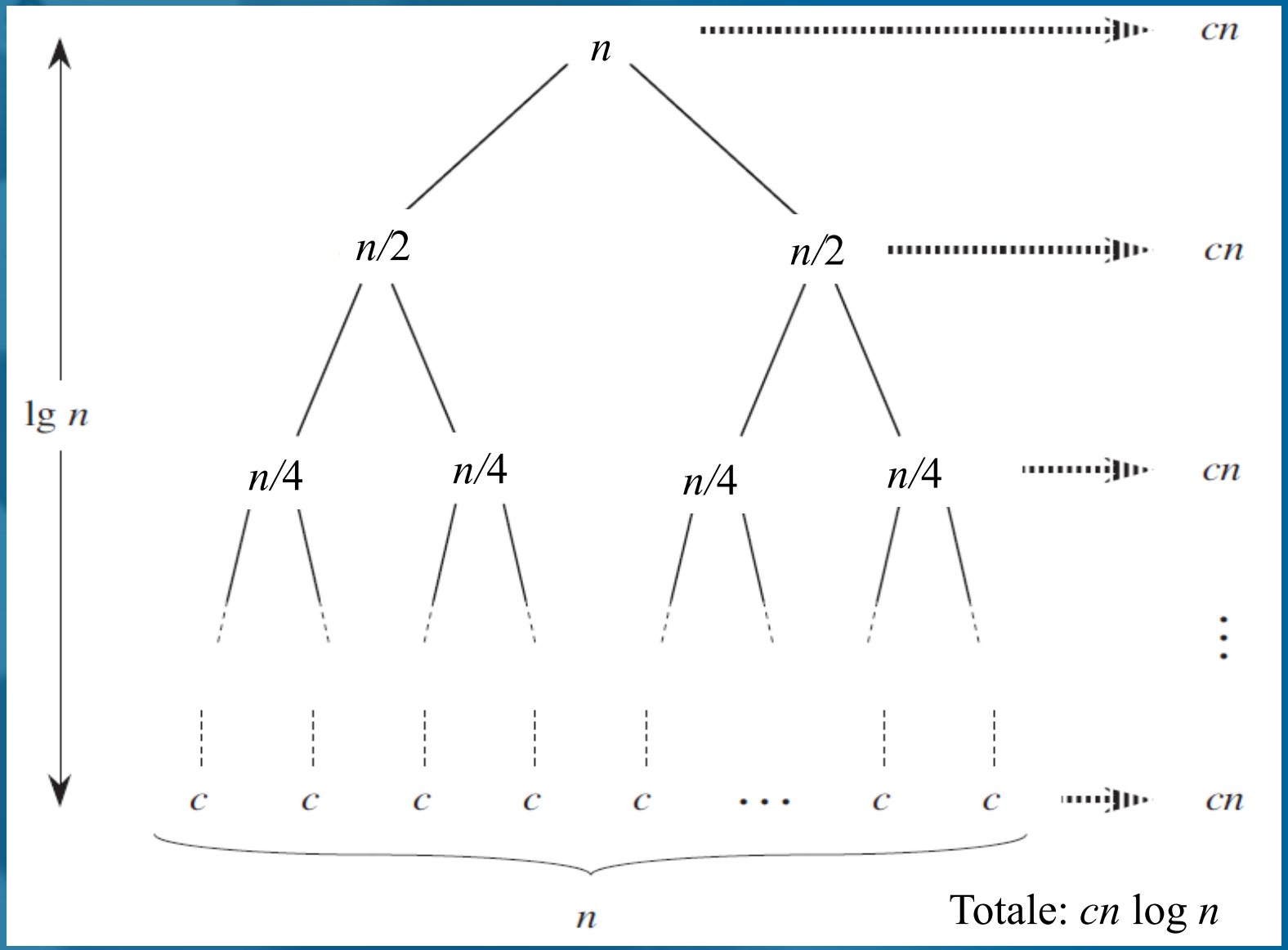
$$T(n)=T(n-1) + T(0) + O(n)$$
$$=T(n-1)+O(1)+O(n)$$
$$=T(n-1)+O(n)$$

- Svolgendo per iterazione si ottiene

$$T(n) = O(n^2)$$

complessità nel caso migliore?

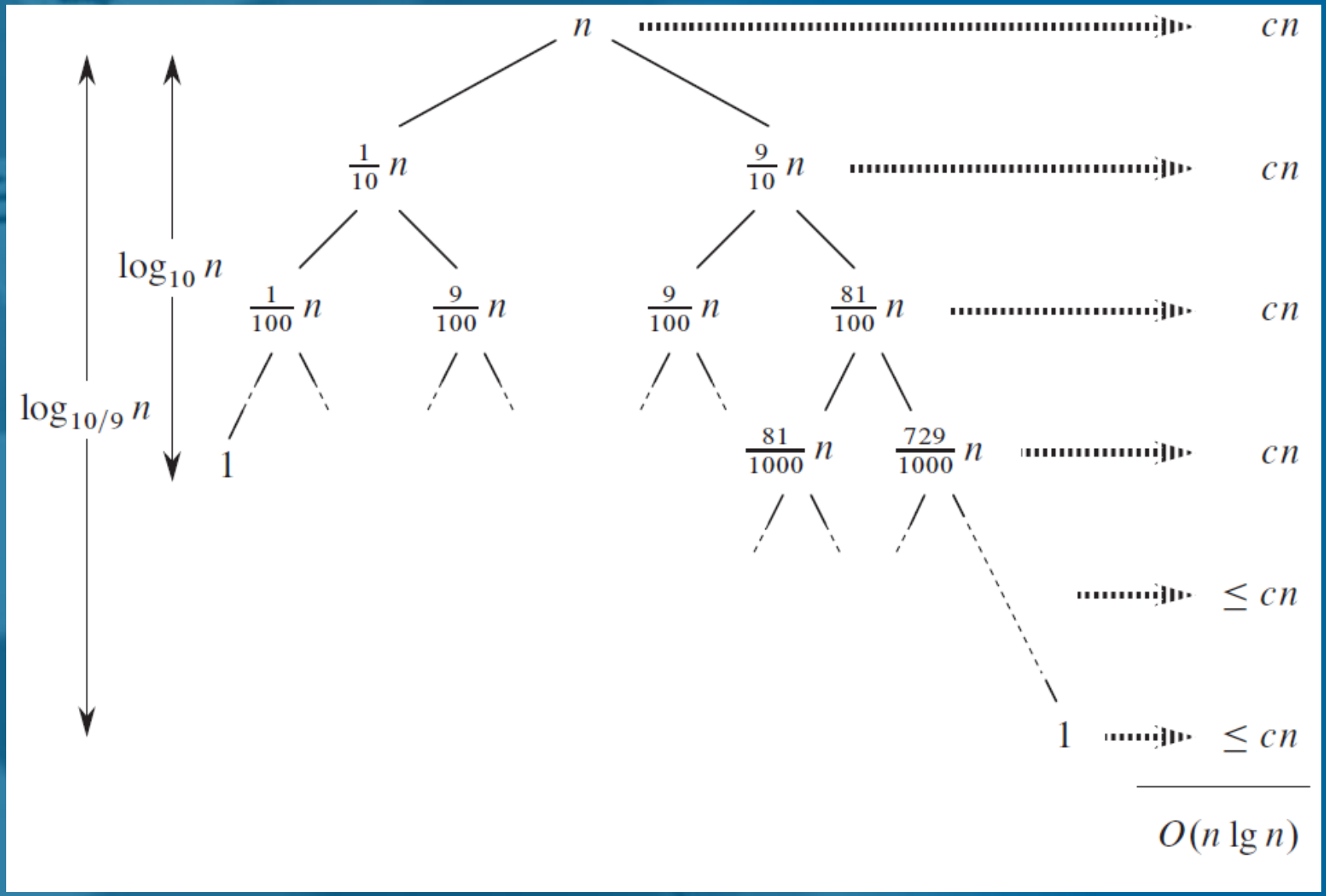
Caso migliore: O(n log n), partizionamento sempre bilanciato



…intuizioni sul caso medio…
(penso al caso di istanze equiprobabili)

- problema: la partizione può essere sbilanciata
- la probabilità che ad ogni passo si presenti la partizione peggiore è molto bassa
- per partizioni che non sono “troppo sbilanciate” l’algoritmo è veloce
- domanda: quale è la complessità dell’algoritmo supponendo che l’algoritmo di partizionamento produca sempre una partizione proporzionale 9-a-1?
- E se la partizione fosse sempre proporzionale a 99-a-1?
- Nota: sembrano partizioni piuttosto sbilanciate…

…la complessità è ancora O(n log n)



…e se le istanze non sono equiprobabili?

Versione randomizzata: scegli il perno x a caso fra gli elementi da ordinare

Teorema
L'algoritmo quickSort randomizzato ordina in loco un array di lunghezza n in tempo $O(n^2)$ nel caso peggiore e $O(n \log n)$ tempo atteso

…e se le istanze non sono equiprobabili?

Versione randomizzata: scegli il perno x a caso fra gli elementi da ordinare

Teorema
L'algoritmo quickSort randomizzato ordina in loco un array di lunghezza n in tempo $O(n^2)$ nel caso peggiore e $O(n \log n)$ con alta probabilità, ovvero con probabilità almeno 1-1/n.

quickSort randomizzato (randomizzazione ≠ caso medio)

- Complessità temporale non dipende dall'ordine dell'input
- nessuna assunzione sulla distribuzione di probabilità delle istanze
- nessun input specifico per il quale si verifica il caso peggiore
- il caso peggiore determinato solo dal generatore di numeri casuali

Analisi e progettazione di algoritmi randomizzati: ampia e importante area di studio e ricerca