

Algoritmi e Strutture Dati

Luciano Gualà

guala@mat.uniroma2.it

www.mat.uniroma2.it/~guala

Esercizio

Analizzare la complessità nel caso medio del primo algoritmo di pesatura (**Alg1**) presentato nella prima lezione. Rispetto alla distribuzione di probabilità sulle istanze, si assuma che la moneta falsa possa trovarsi in modo equiprobabile in una qualsiasi delle n posizioni.

Alg1 ($X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$)

1. **for** $i=2$ **to** n **do**
2. **if** $\text{peso}(x_1) > \text{peso}(x_i)$ **then return** x_1
3. **if** $\text{peso}(x_1) < \text{peso}(x_i)$ **then return** x_i

$$\sum_{\mathbf{I} \text{ di dim } n} \Pr(\mathbf{I}) \# \text{pesate}(\mathbf{I}) =$$

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{\Pr(\text{"moneta falsa è in posizione } j \text{ in } \mathbf{I}\text{"})}_{1/n} \underbrace{\# \text{pesate}(\mathbf{I})}_{\substack{1 \text{ se } j=1, \\ j-1 \text{ altrimenti}}} = (1/n) \left(1 + \sum_{j=2}^n (j-1) \right)$$

$$= (1/n) \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} j \right) = (1/n) \left(1 + (n-1) \frac{n}{2} \right) = 1/n + (n-1)/2$$

Un problema simile: ricerca di un elemento in un array/lista non ordinata

l'algoritmo torna la posizione di x in L se x è presente, -1 altrimenti

algoritmo RicercaSequenziale(array L , elem x) \rightarrow intero

1. $n =$ lunghezza di L
2. $i=1$
3. **for** $i=1$ to n **do**
4. **if** ($L[i]=x$) **then return** i *//trovato*
5. **return** -1 *//non trovato*

$$T_{\text{best}}(n) = 1$$

x è in prima posizione

$$T_{\text{worst}}(n) = n$$

$x \notin L$ oppure è in ultima posizione

$$T_{\text{avg}}(n) = (n+1)/2$$

assumendo che $x \in L$ e che si trovi con la stessa probabilità in una qualsiasi posizione

Una variante: ricerca di un elemento in un array/lista ordinata

Algoritmo di **ricerca binaria**: uno strumento molto potente

gli indici i e j indicano la porzione di L in cui cercare l'elemento x

l'algoritmo torna la posizione di x in L , se x c'è, -1 altrimenti

algoritmo RicercaBinariaRic(array L , elem x , int i , int j) -> intero

1. **if** ($i > j$) **then return** -1
2. $m = \lfloor (i+j)/2 \rfloor$
3. **if** ($L[m] = x$) **then return** m
4. **if** ($L[m] > x$) **then return** RicercaBinariaRic(L , x , i , $m-1$)
5. **else return** RicercaBinariaRic(L , x , $m+1$, j)

$$T(n) = T(n/2) + O(1) \quad \longrightarrow \quad T(n) = O(\log n)$$

Esempi su un array di 9 elementi

0	1	2	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4					
		2	4					

Cerca 2

0	1	2	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4					

Cerca 1

0	1	2	4	5	6	7	8	9
					6	7	8	9
							8	9
								9

Cerca 9

0	1	2	4	5	6	7	8	9
0	1	2	4					
		2	4					
			4					

Cerca 3

3 < 4 quindi *i* e *j* si
invertono

ricorsione, tecniche di
progettazione e equazioni di
ricorrenza

Sommario

- Algoritmi ricorsivi: come analizzarli?
- Complessità di algoritmi ricorsivi e equazioni di ricorrenza
- Una tecnica di progettazione algoritmica: divide et impera
- Metodi per risolvere equazioni di ricorrenza:
 - iterazione
 - albero della ricorsione
 - sostituzione
 - teorema Master
 - cambiamento di variabile

Algoritmi ricorsivi: come analizzarli?

algoritmo fibonacci2(*intero n*) → *intero*

if ($n \leq 2$) **then return** 1

else return fibonacci2($n-1$) + fibonacci2($n-2$)

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + O(1)$$

Algoritmi ricorsivi: come analizzarli?

Algoritmo di **ricerca binaria**: uno strumento molto potente

gli indici i e j indicano la porzione di L in cui cercare l'elemento x

l'algoritmo torna la posizione di x in L , se x c'è, -1 altrimenti

```
algoritmo RicercaBinariaRic(array  $L$ , elem  $x$ , int  $i$ , int  $j$ ) -> intero
```

```
1. if ( $i > j$ ) then return -1
```

```
2.  $m = \lfloor (i+j)/2 \rfloor$ 
```

```
3. if ( $L[m] = x$ ) then return  $m$ 
```

```
4. if ( $L[m] > x$ ) then return RicercaBinariaRic( $L$ ,  $x$ ,  $i$ ,  $m-1$ )
```

```
5. else return RicercaBinariaRic( $L$ ,  $x$ ,  $m+1$ ,  $j$ )
```

$$T(n) = T(n/2) + O(1)$$

Algoritmi ricorsivi: come analizzarli?

Alg4 (X)

1. **if** ($|X|=1$) **then** return unica moneta in X
2. dividi X in tre gruppi X_1, X_2, X_3 di dimensione bilanciata siano X_1 e X_2 i gruppi che hanno la stessa dimensione (ci sono sempre)
3. **if** $\text{peso}(X_1) = \text{peso}(X_2)$ **then return** Alg4(X_3)
4. **if** $\text{peso}(X_1) > \text{peso}(X_2)$ **then return** Alg4(X_1)
else return Alg4(X_2)

$$T(n) = T(n/3) + O(1)$$

Equazioni di ricorrenza

la **complessità computazionale** di un algoritmo ricorsivo può essere espressa in modo naturale attraverso una **equazione di ricorrenza**

esempi:

$$T(n) = T(n/3) + 2T(n/4) + O(n \log n)$$

$$T(n) = T(n-1) + O(1)$$

$$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$$

casi base:
 $T(\text{costante}) = \text{cost}$
(a volte $T(1) = 1$)

Metodo dell'iterazione

Idea: "srotolare" la ricorsione, ottenendo una sommatoria dipendente solo dalla dimensione n del problema iniziale

Esempio: $T(n) = c + T(n/2)$

$$T(n/2) = c + T(n/4) \quad \dots$$

➔

$$\begin{aligned} T(n) &= c + T(n/2) \\ &= 2c + T(n/4) \\ &= 2c + c + T(n/8) \\ &= 3c + T(n/8) \\ &\dots \\ &= ic + T(n/2^i) \end{aligned}$$

Per $i = \log_2 n$: $T(n) = c \log_2 n + T(1) = \Theta(\log n)$

Metodo dell'iterazione

Esempio: $T(n) = T(n-1) + 1$

$$\begin{aligned}T(n) &= T(n-1) + 1 \\ &= T(n-2) + 1 + 1 \\ &= T(n-2) + 2 \\ &= T(n-3) + 1 + 2 \\ &= T(n-3) + 3 \\ &= T(n-4) + 4 \\ &\dots \\ &= T(n-i) + i\end{aligned}$$

Per $i=n-1$: $T(n) = T(1) + n-1 = \Theta(n)$

Metodo dell'iterazione

Esempio: $T(n) = 2T(n-1)+1$

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$= 2(2T(n-2)+1) + 1$$

$$= 4T(n-2)+2+1$$

$$= 4(2T(n-3)+1)+2+1$$

$$= 8T(n-3)+4+2+1$$

$$= 16T(n-4)+8+4+2+1$$

...

$$= 2^i T(n-i) + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j$$

per $i=n-1$

$$T(n) = 2^{n-1} T(1) + \sum_{j=0}^{n-2} 2^j = \Theta(2^n)$$

Metodo dell'iterazione

Esempio: $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$$

$$= T(n-2) + T(n-3) + 1 + T(n-3) + T(n-4) + 1 + 1$$

$$= T(n-2) + 2T(n-3) + T(n-4) + 3$$

$$= T(n-3) + T(n-4) + 1 + 2(T(n-4) + T(n-5) + 1) + T(n-5) + T(n-6) + 1 + 3$$

$$= T(n-3) + 3T(n-4) + 3T(n-5) + T(n-6) + 7$$

...



???

Esercizi

risolvere usando il metodo dell'iterazione:

Esercizio 1: $T(n) = T(n-1) + n,$
 $T(1) = 1$

Esercizio 2: $T(n) = 9 T(n/3) + n,$
 $T(1) = 1$

(soluzione sul libro di testo: Esempio 2.4)

Analisi dell'albero della ricorsione

(un modo grafico di pensare il metodo dell'iterazione)

Idea:

- disegnare l'albero delle chiamate ricorsive indicando la dimensione di ogni nodo
- stimare il tempo speso da ogni nodo dell'albero
- stimare il tempo complessivo "sommando" il tempo speso da ogni nodo

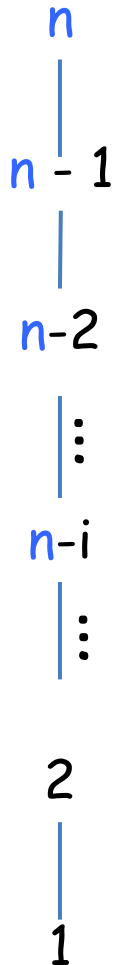
Suggerimento 1: se il tempo speso da ogni nodo è costante, $T(n)$ è proporzionale al numero di nodi

Suggerimento 2: a volte conviene analizzare l'albero per livelli:
-analizzare il tempo speso su ogni livello (fornendo upper bound)
-stimare il numero di livelli

tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = T(n-1) + 1$$

$$T(1) = 1$$



quanto costa ogni nodo? ...uno!
quanti nodi ha l'albero? n

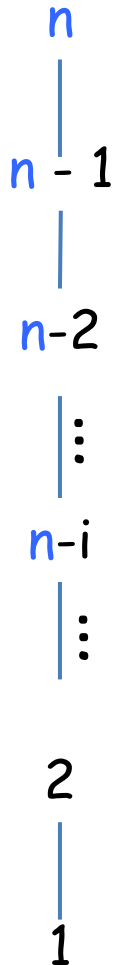


$$T(n) = \Theta(n)$$

tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$T(1) = 1$$



quanto costa ogni nodo?

al più n

quanti nodi ha l'albero?

n



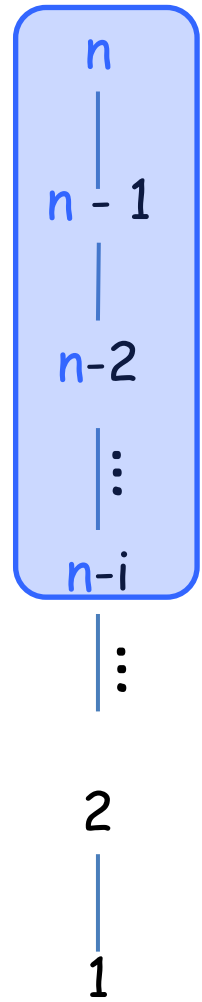
$$T(n) = O(n^2)$$

vale $T(n) = \Theta(n^2)$?

tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$T(1) = 1$$



$n/2$ nodi
ognuno dei
quali costa
 $\geq n/2$

quanto costa ogni nodo?
quanti nodi ha l'albero?


al più n
 n



$$T(n) = O(n^2)$$

vale $T(n) = \Theta(n^2)$?

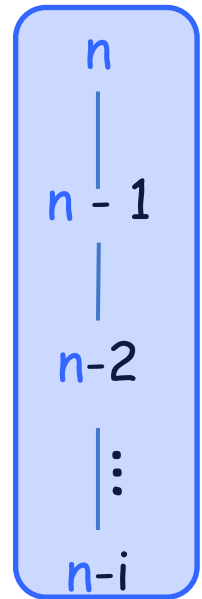
$$T(n) \geq n/2 \cdot n/2 = n^2/4$$

 $T(n) = \Omega(n^2)$

tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$T(1) = 1$$



$n/2$ nodi
ognuno dei
quali costa
 $\geq n/2$

quanto costa ogni nodo?
quanti nodi ha l'albero?

al più n
 n



$$T(n) = O(n^2)$$

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

\vdots

2

1

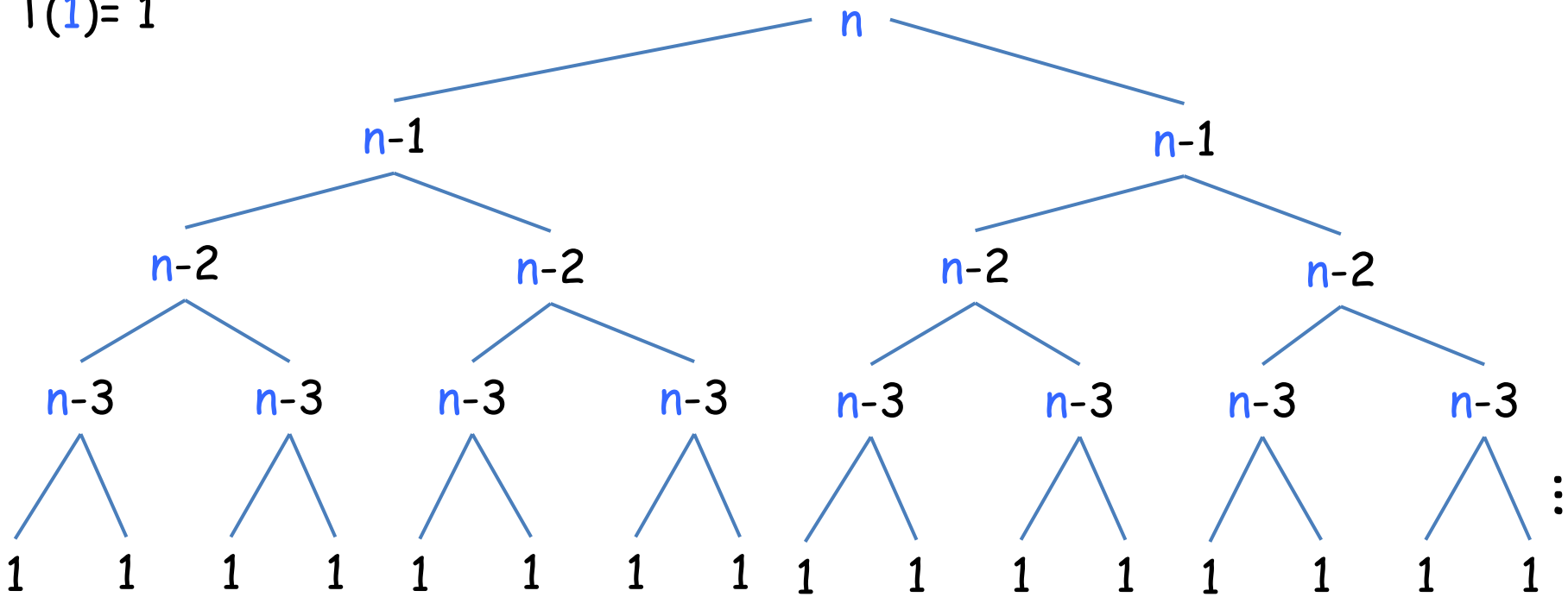
$$T(n) \geq n/2 \cdot n/2 = n^2/4$$

$\Rightarrow T(n) = \Omega(n^2)$

tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$T(1) = 1$$



albero binario completo!

quanto costa ogni nodo?

...uno!

quanto è alto l'albero?

...n-1!

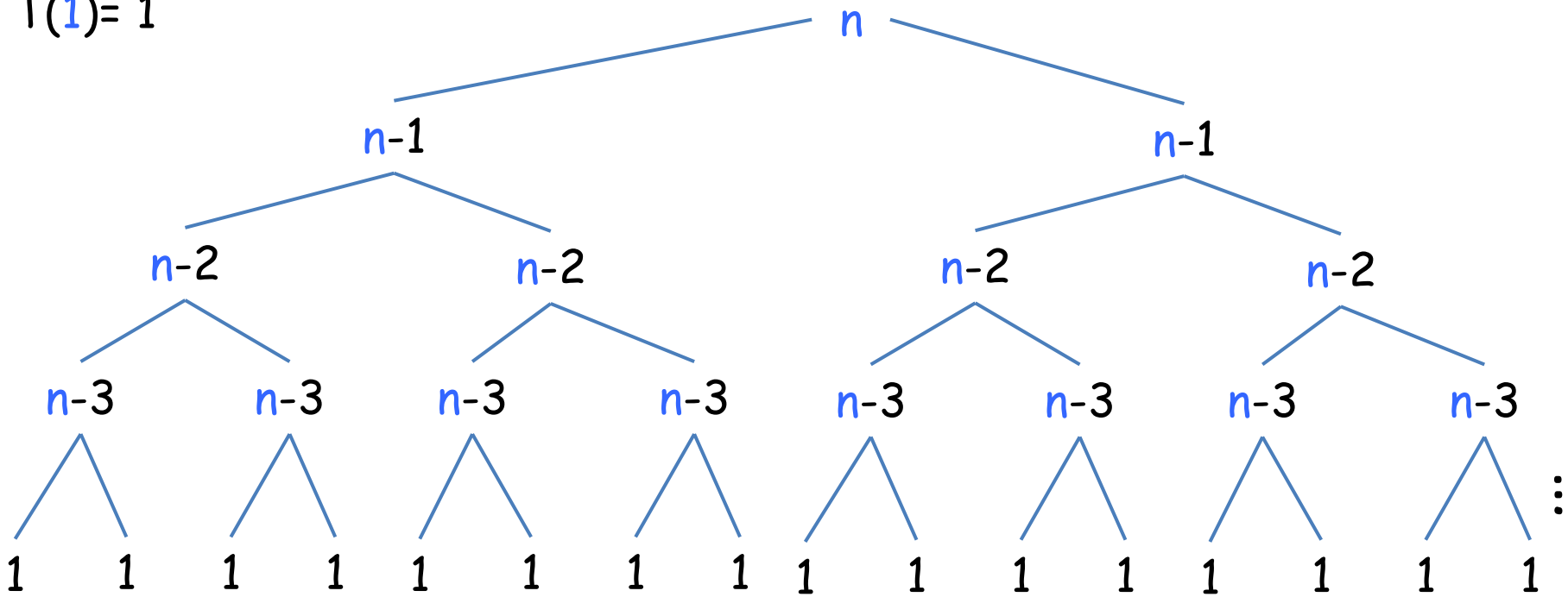
quanti nodi ha un albero binario completo di altezza h?

$\sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1} - 1$
➔
 $T(n) = 2^n - 1 = \Theta(2^n)$

tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = 2T(n-1) + n$$

$$T(1) = 1$$



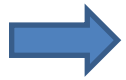
albero binario completo!

- quanto costa ogni nodo?
- quanto è alto l'albero?
- quanti nodi ha un albero binario completo di altezza h ?

...al più n

... $n-1$

$$\sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1} - 1$$



$$T(n) \leq n2^n = \Theta(n2^n)$$

$$T(n) = O(n2^n)$$

tecnica albero della ricorsione

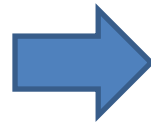
$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$$

$$T(1) = 1$$

Un'idea: usare maggiorazioni per fornire upper bound

$$T(n) \leq R(n)$$

$$R(n) = 2R(n-1) + 1$$



$$T(n) = O(2^n)$$



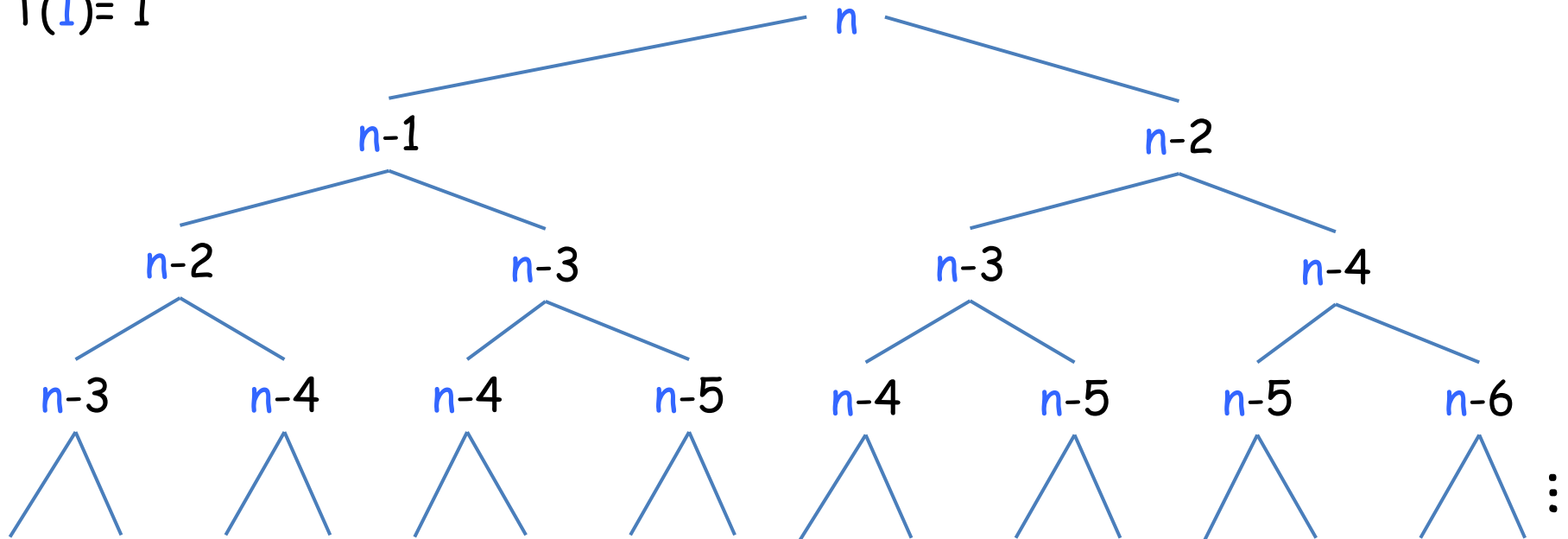
$$R(n) = \Theta(2^n)$$

vale $T(n) = \Theta(2^n)$?

tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$$

$$T(1) = 1$$



albero chiamate ricorsive dell'algoritmo Fibonacci 2!

quanto costa ogni nodo?

...uno

quanti nodi ha l'albero?

$\Theta(\phi^n)$



$$T(n) = \Theta(\phi^n)$$

$$[T(n) = o(2^n)]$$

Analisi dell'albero della ricorsione

due esempi:

$$\text{Esempio 1: } T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n, \\ T(1) = 1$$

$$\text{Esempio 2: } T(n) = 2 T(n-2) + 1, \\ T(1) = 1$$

Sommario

- Algoritmi ricorsivi: come analizzarli?
- Complessità di algoritmi ricorsivi e equazioni di ricorrenza
- Una tecnica di progettazione algoritmica: *divide et impera*
- Metodi per risolvere equazioni di ricorrenza:
 - iterazione
 - albero della ricorsione
 - sostituzione
 - teorema Master
 - cambiamento di variabile

Metodo della sostituzione

Idea:

1. indovinare la (forma della) soluzione
2. usare induzione matematica per provare che la soluzione è quella intuita
3. risolvi rispetto alle costanti

Metodo della sostituzione

Esempio: $T(n) = n + T(n/2)$, $T(1)=1$

Assumiamo che la soluzione sia $T(n) \leq cn$ per una costante c opportuna

Passo base: $T(1)=1 \leq c \cdot 1$ per ogni $c \geq 1$

Passo induttivo:

$$T(n) = n + T(n/2) \leq n + c(n/2) = (c/2 + 1)n$$

Quindi: quando $T(n) \leq cn$?

devo avere: $c/2 + 1 \leq c$

da cui segue: $c \geq 2$

$$T(n) \leq 2n \quad \longrightarrow \quad T(n) = O(n)$$

Esercizi

risolvere usando il metodo della sostituzione:

Esercizio: $T(n) = 4T(n/2) + n,$
 $T(1) = 1$

(...e fare esperienza della tecnicità del metodo.)

Tecnica del divide et impera

Algoritmi basati sulla tecnica del *divide et impera*:

- dividi il problema (di dimensione n) in a sottoproblemi di dimensione n/b
- risolvi i sottoproblemi ricorsivamente
- ricombina le soluzioni

Sia $f(n)$ il tempo per dividere e ricombinare istanze di dimensione n . La relazione di ricorrenza è data da:

$$T(n) = \begin{cases} aT(n/b) + f(n) & \text{se } n > 1 \\ \Theta(1) & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Algoritmo Fibonacci6

algoritmo fibonacci6(*intero* n) \rightarrow *intero*

1. $A \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $M \leftarrow \text{potenzaDiMatrice}(A, n - 1)$
3. **return** $M[0][0]$

funzione potenzaDiMatrice(*matrice* A , *intero* k) \rightarrow *matrice*

4. **if** ($k \leq 1$) **then** $M \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. **else** $M \leftarrow \text{potenzaDiMatrice}(A, \lfloor k/2 \rfloor)$
6. $M \leftarrow M \cdot M$
7. **if** (k è dispari) **then** $M \leftarrow M \cdot A$
8. **return** M

$$a=1, b=2, f(n)=O(1)$$

Algoritmo ottimo di pesatura

Alg4 (X)

1. **if** ($|X|=1$) **then** return unica moneta in X
2. dividi X in tre gruppi X_1, X_2, X_3 di dimensione bilanciata siano X_1 e X_2 i gruppi che hanno la stessa dimensione (ci sono sempre)
3. **if** $\text{peso}(X_1) = \text{peso}(X_2)$ **then return** Alg4(X_3)
4. **if** $\text{peso}(X_1) > \text{peso}(X_2)$ **then return** Alg4(X_1)
else return Alg4(X_2)

$$a=1, b=3, f(n)=O(1)$$

Teorema Master: enunciato informale

$$n^{\log_b a} \quad \text{vs} \quad f(n)$$

quale va più velocemente a infinito?

Stesso ordine asintotico $\rightarrow T(n) = \Theta(f(n) \log n)$

Se una delle due è "polinomialmente" più veloce

$\rightarrow T(n)$ ha l'ordine asintotico della più veloce

Teorema Master

La relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} aT(n/b) + f(n) & \text{se } n > 1 \\ \Theta(1) & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

ha soluzione:

1. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ se $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ per $\varepsilon > 0$
2. $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$ se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
3. $T(n) = \Theta(f(n))$ se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ per $\varepsilon > 0$ e $a f(n/b) \leq c f(n)$ per $c < 1$ e n sufficientemente grande

Esempi

1) $T(n) = n + 2T(n/2)$

$a=2, b=2, f(n)=n=\Theta(n^{\log_2 2})$
(caso 2 del teorema master)

$\rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$

2) $T(n) = c + 3T(n/9)$

$a=3, b=9, f(n)=c=O(n^{\log_9 3 - \epsilon})$
(caso 1 del teorema master)

$\rightarrow T(n) = \Theta(\sqrt{n})$

3) $T(n) = n + 3T(n/9)$

$a=3, b=9, f(n)=n=\Omega(n^{\log_9 3 + \epsilon})$

$3(n/9) \leq c n$ per $c=1/3$
(caso 3 del teorema master)

$\rightarrow T(n) = \Theta(n)$

Esempi

$$4) T(n) = n \log n + 2T(n/2)$$

$$a=2, b=2, f(n) = \omega(n^{\log_2 2})$$

$$\text{ma } f(n) \neq \Omega(n^{\log_2 2 + \varepsilon}), \forall \varepsilon > 0$$

non si può applicare
il teorema Master!

Cambiamento di variabile

Esempio: $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(1)$,
 $T(1) = 1$

$$T(n) = T(n^{1/2}) + O(1)$$

$$n = 2^x \quad \rightarrow \quad x = \log_2 n$$

$$T(2^x) = T(2^{x/2}) + O(1) \quad R(x) := T(2^x)$$

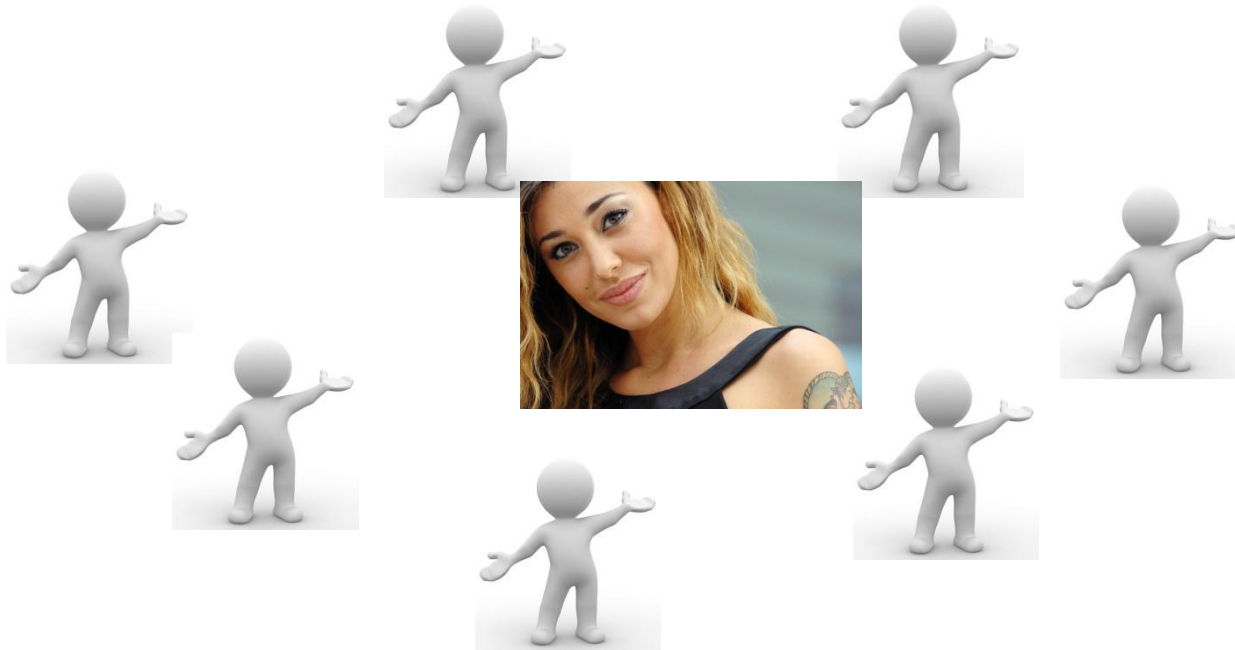
$$R(x) = R(x/2) + O(1) \quad \rightarrow \quad R(x) = O(\log x)$$

$$T(n) = O(\log \log n)$$

due problemi (per cui la ricorsione può aiutare)

Esercizio: progettare due algoritmi ricorsivi per i seguenti due problemi. Se ne studi la complessità temporale (nel caso peggiore).

problema della celebrità



ad una festa ci sono n persone
una di queste è una **celebrità**
la **celebrità** non conosce nessuno ma è
conosciuta da tutti

obiettivo:
individuare la celebrità facendo
(poche) domande a persone del tipo:
conosci questa persona?

problema della celebrità: un algoritmo ricorsivo

Celebrità (X)

1. **if** $|X|=1$ **then return** l'unica persona in X
% che è la celebrità
2. siano A e B due persone qualsiasi in X:
chiedi ad A se conosce B
3. **if** (A conosce B)
then
%A non può essere la celebrità
return Celebrità(X-{A})
else
%B non può essere la celebrità
return Celebrità(X-{B})

X: insieme di persone fra le quali sto cercando la celebrità

quante domande fa l'algoritmo?

$T(n)$: # domande che l'algoritmo fa nel caso peggiore prima di individuare la celebrità fra n persone

$$T(n) = T(n-1) + 1 \quad T(1) = 0$$

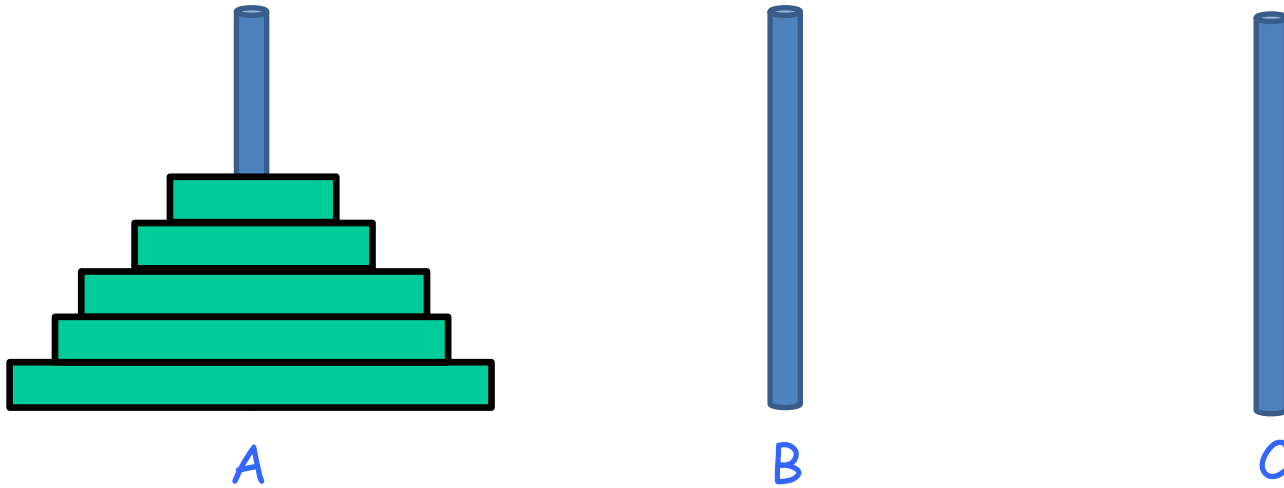
$$T(n) = n - 1$$

(srotolando)



$$T(n) = T(n-1) + 1 = T(n-2) + 2 = T(n-3) + 3 = \dots T(n-i) + i \dots = T(1) + n - 1 = n - 1$$

La torre di Hanoi

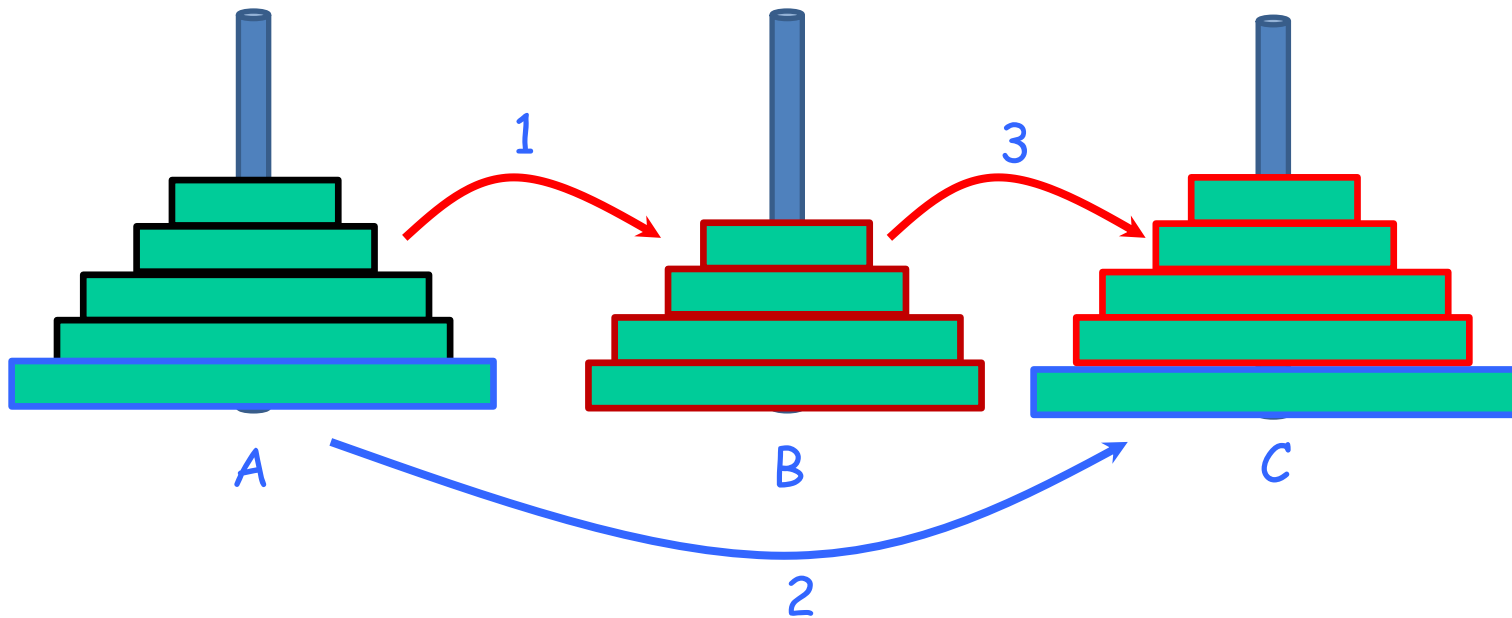


n dischi di diametro diverso, tre pali

regole: si può spostare un disco alla volta e **non si può** mettere un disco di diametro più grande **sopra** uno di diametro più piccolo

obiettivo: spostare i dischi dal palo **A** al palo **C**
(facendo meno spostamenti possibile)

Un'elegante soluzione ricorsiva



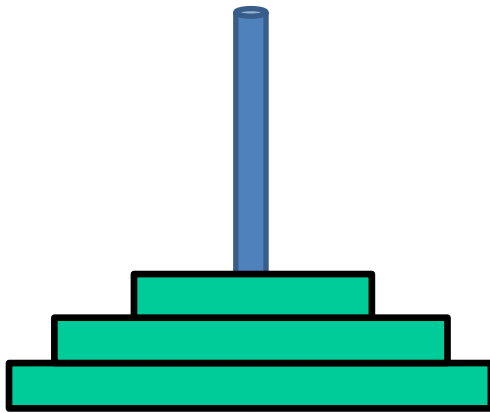
Hanoi(dischi, destinazione, palo ausiliario)

Hanoi ([1,2...,n], C, B)

1. **if** $n=1$ **then** sposta il disco su C
2. Hanoi([1,2,...,n-1], B, C)
3. sposta il disco n su C
4. Hanoi([1,2,...,n-1], C, A)

esecuzione dell'algoritmo

$n = 3$



A



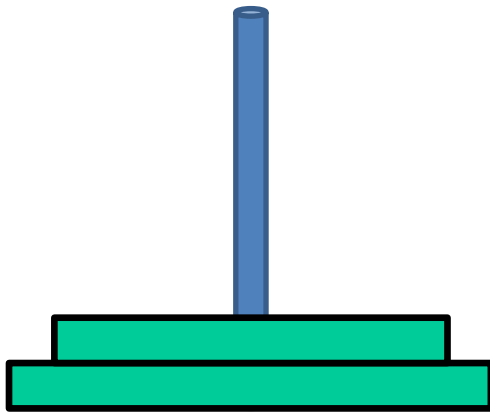
B



C

esecuzione dell'algoritmo

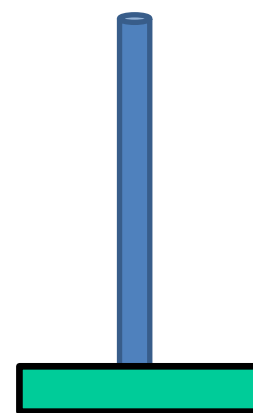
$n = 3$



A



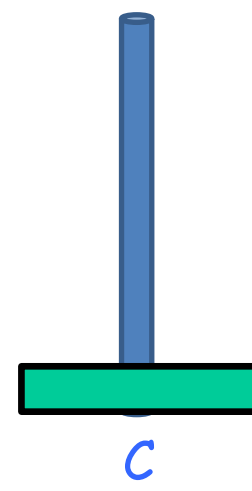
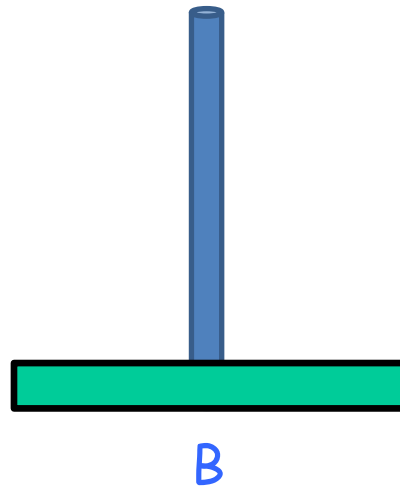
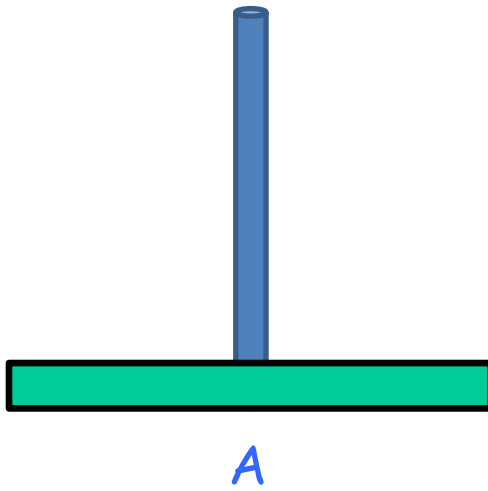
B



C

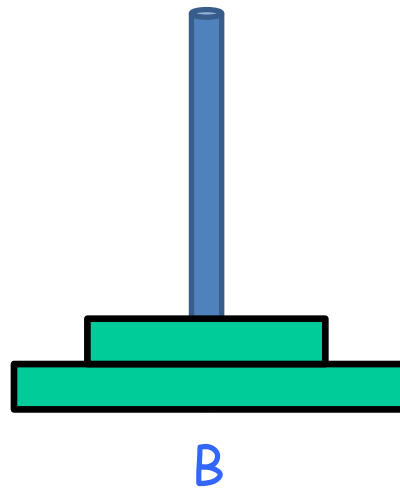
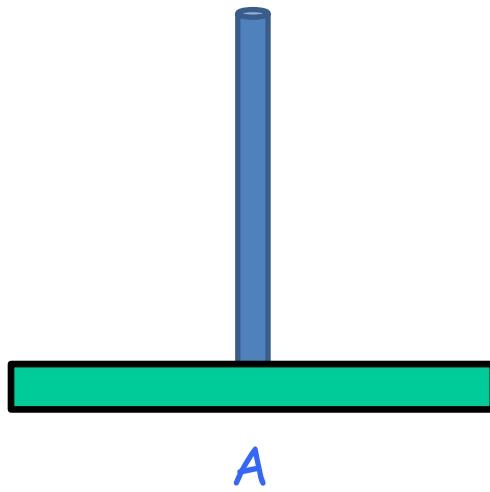
esecuzione dell'algoritmo

$n = 3$



esecuzione dell'algoritmo

$n = 3$

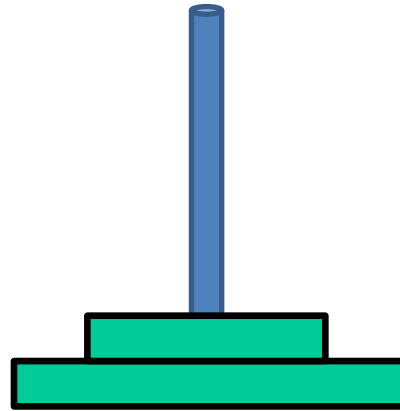


esecuzione dell'algoritmo

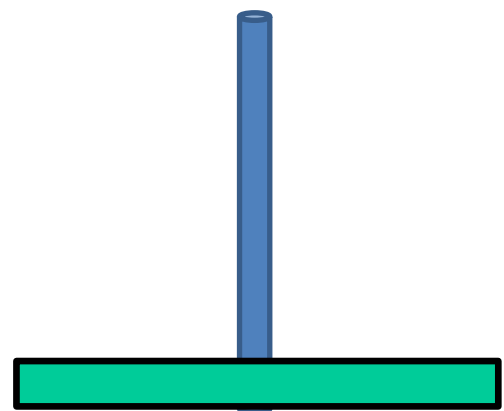
$n = 3$



A



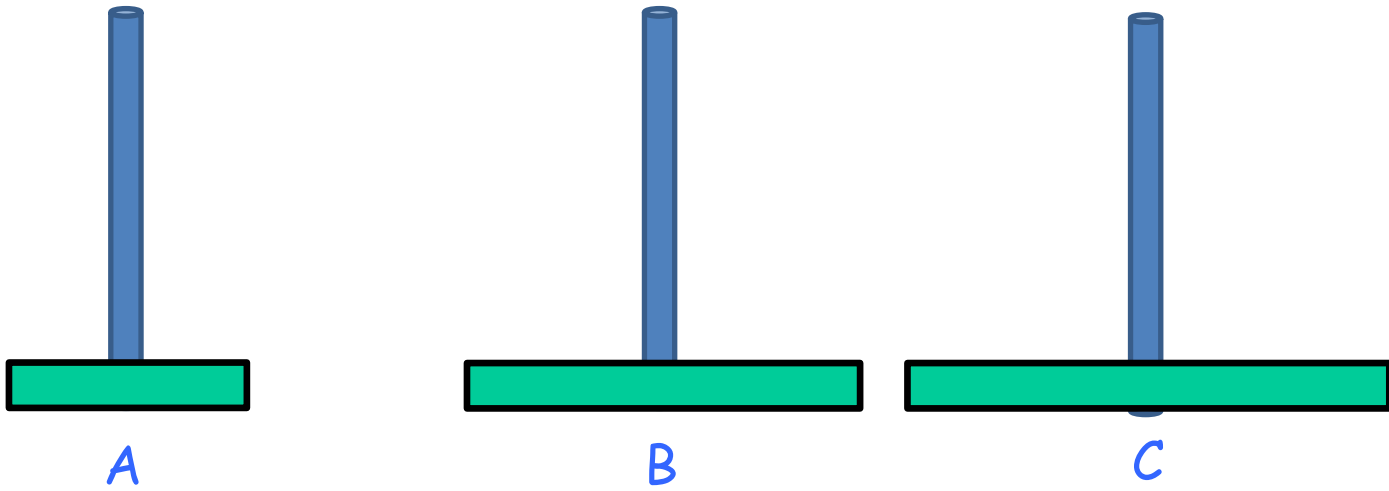
B



C

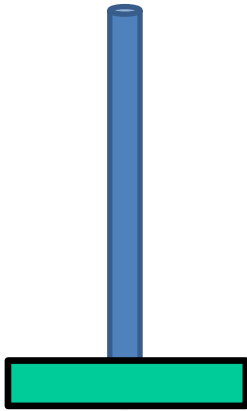
esecuzione dell'algoritmo

$n = 3$



esecuzione dell'algoritmo

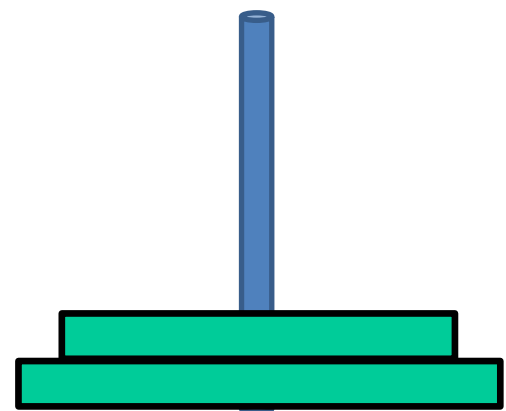
$n = 3$



A



B



C

esecuzione dell'algoritmo

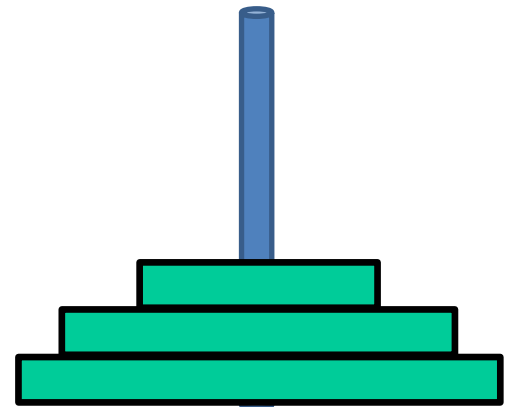
$n = 3$



A



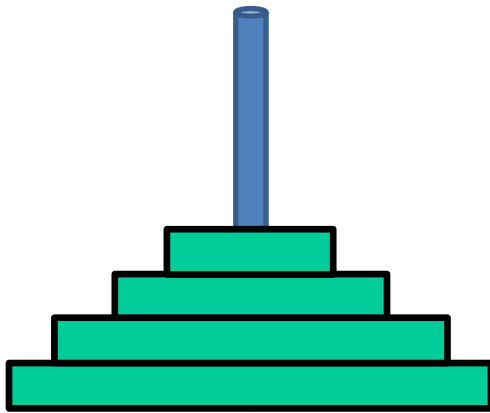
B



C

esecuzione dell'algoritmo

$n = 4$



A



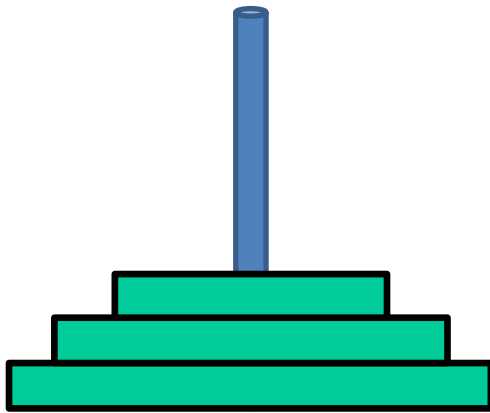
B



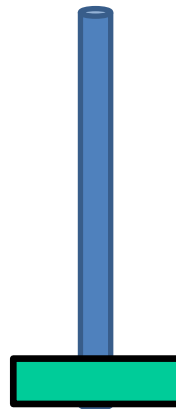
C

esecuzione dell'algoritmo

$n = 4$



A



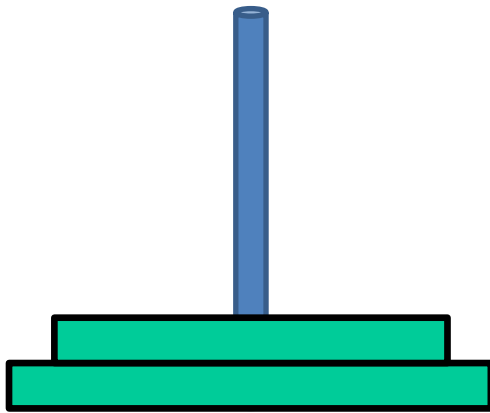
B



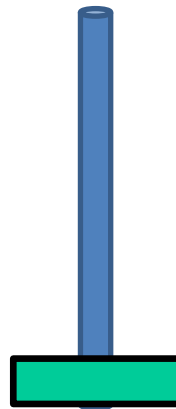
C

esecuzione dell'algoritmo

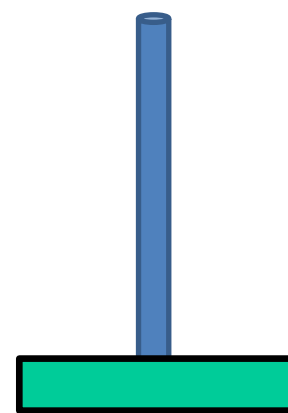
$n = 4$



A



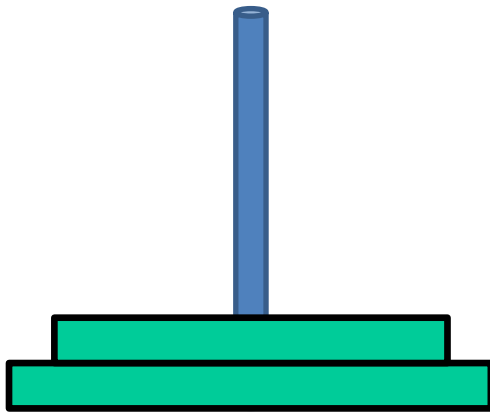
B



C

esecuzione dell'algoritmo

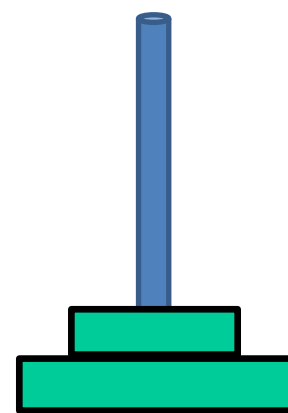
$n = 4$



A



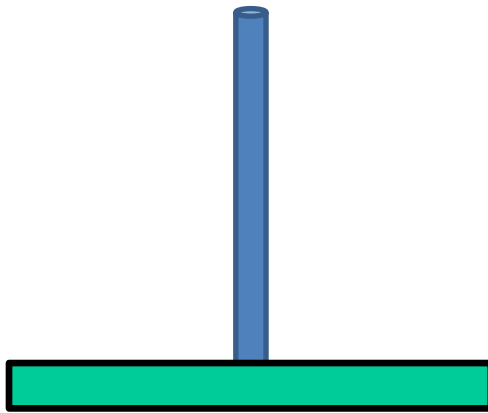
B



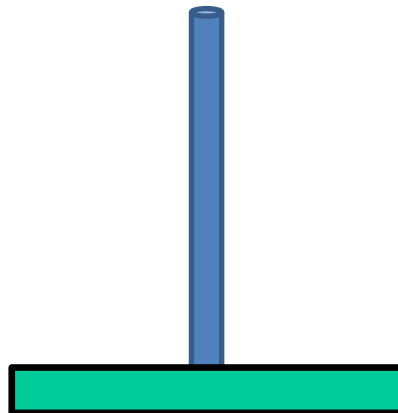
C

esecuzione dell'algoritmo

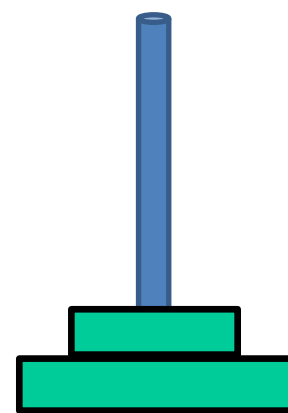
$n = 4$



A



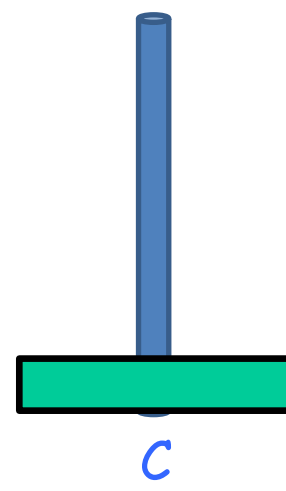
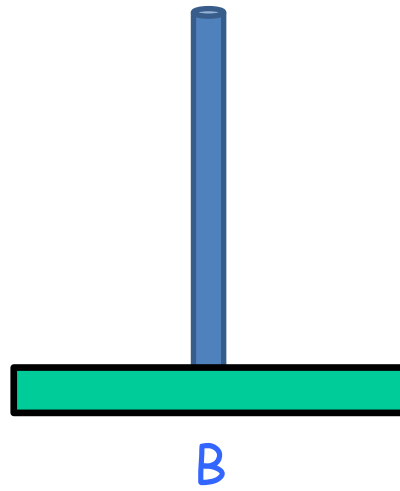
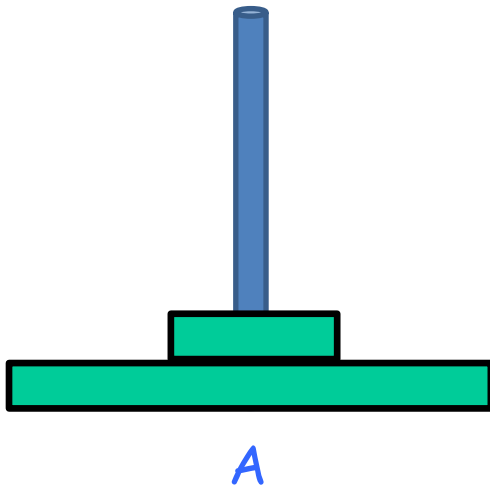
B



C

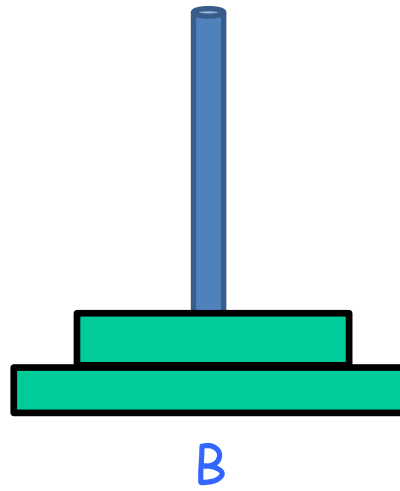
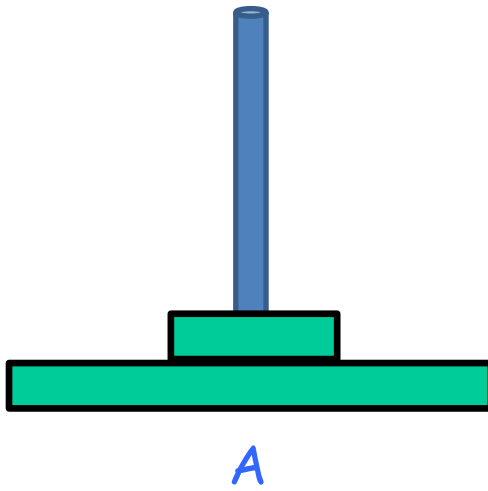
esecuzione dell'algoritmo

$n = 4$



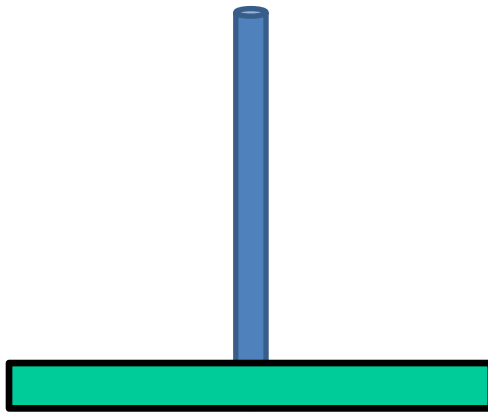
esecuzione dell'algoritmo

$n = 4$

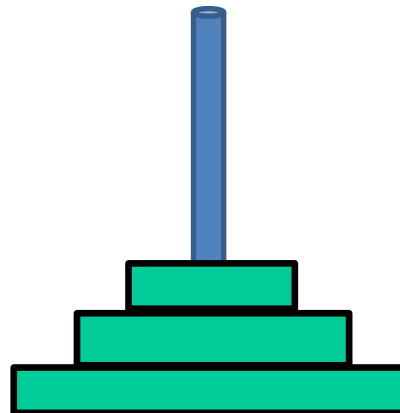


esecuzione dell'algoritmo

$n = 4$



A



B



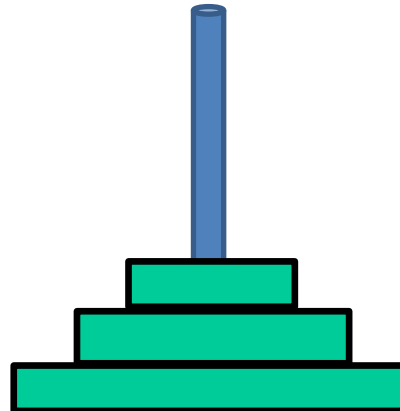
C

esecuzione dell'algoritmo

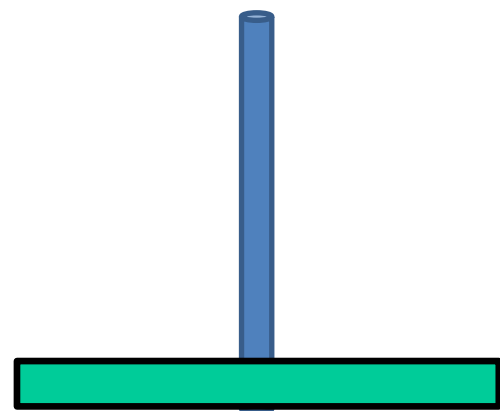
$n = 4$



A



B



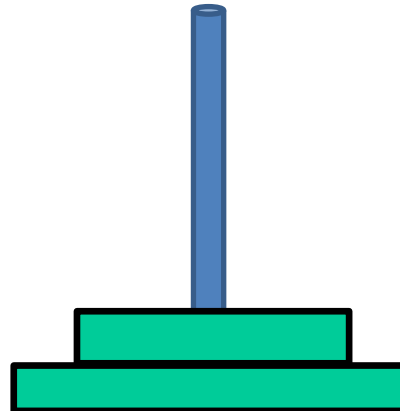
C

esecuzione dell'algoritmo

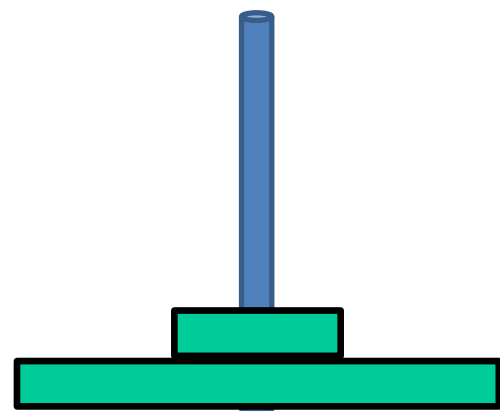
$n = 4$



A



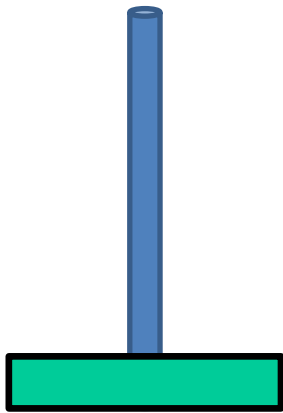
B



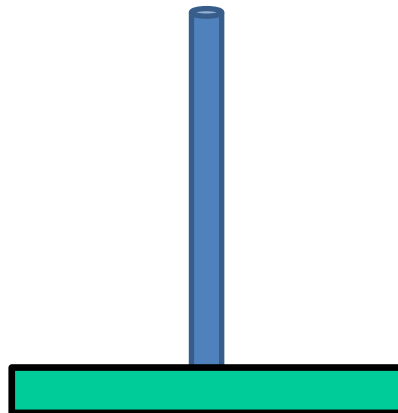
C

esecuzione dell'algoritmo

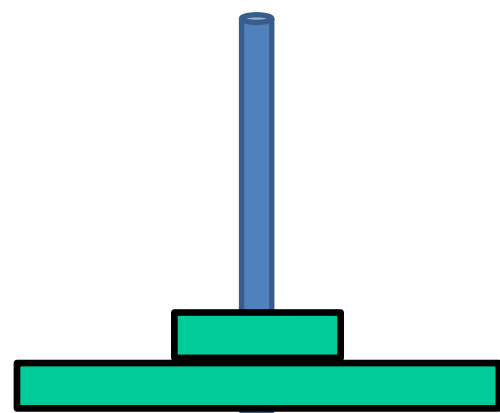
$n = 4$



A



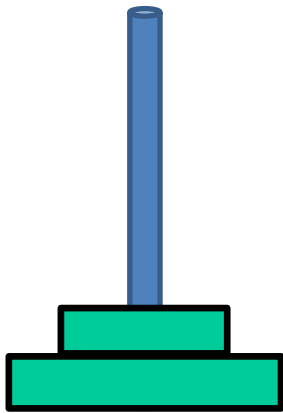
B



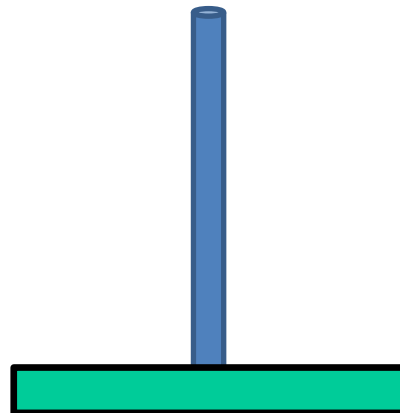
C

esecuzione dell'algoritmo

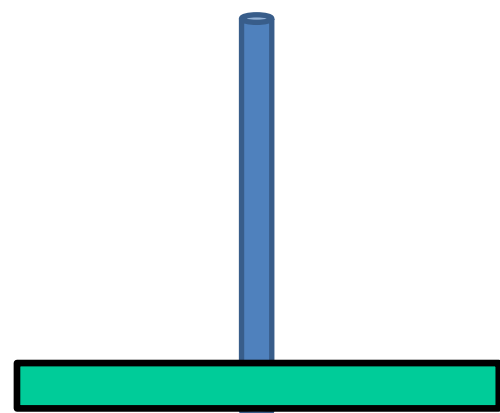
$n = 4$



A



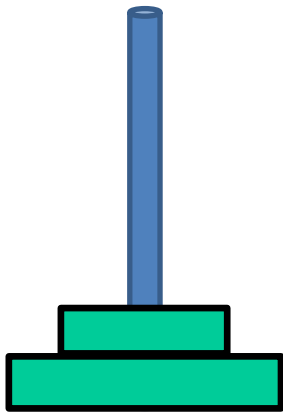
B



C

esecuzione dell'algoritmo

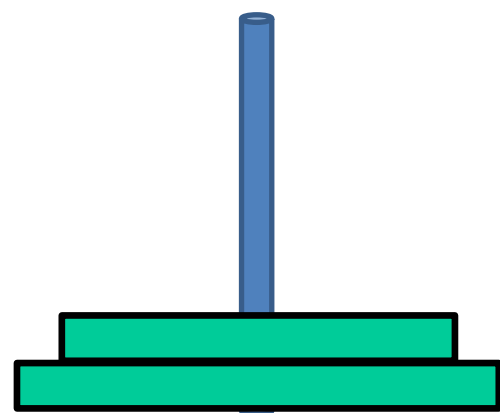
$n = 4$



A



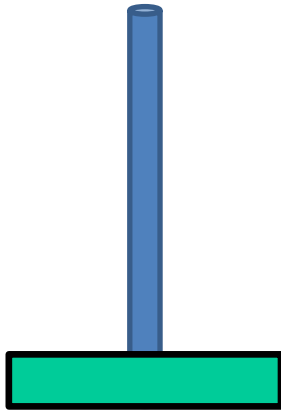
B



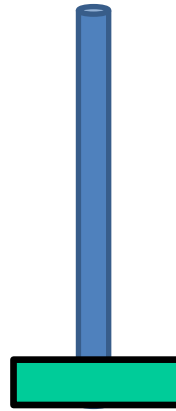
C

esecuzione dell'algoritmo

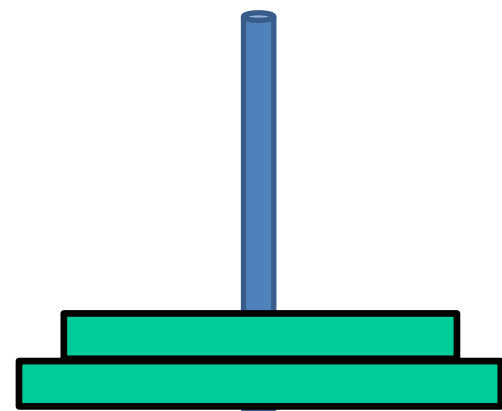
$n = 4$



A



B



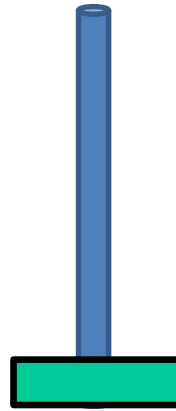
C

esecuzione dell'algoritmo

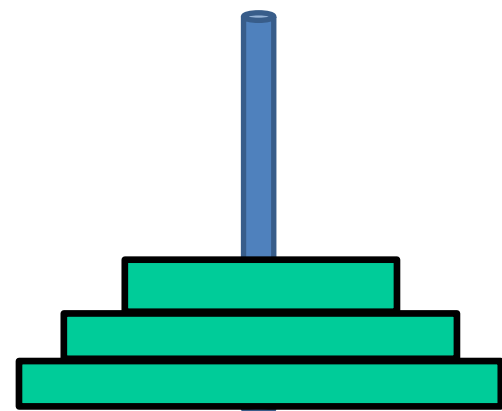
$n = 4$



A



B



C

esecuzione dell'algoritmo

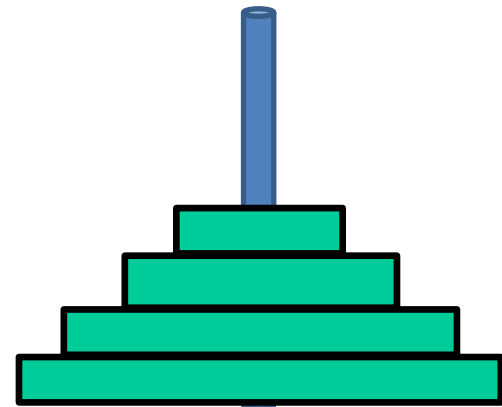
$n = 4$



A

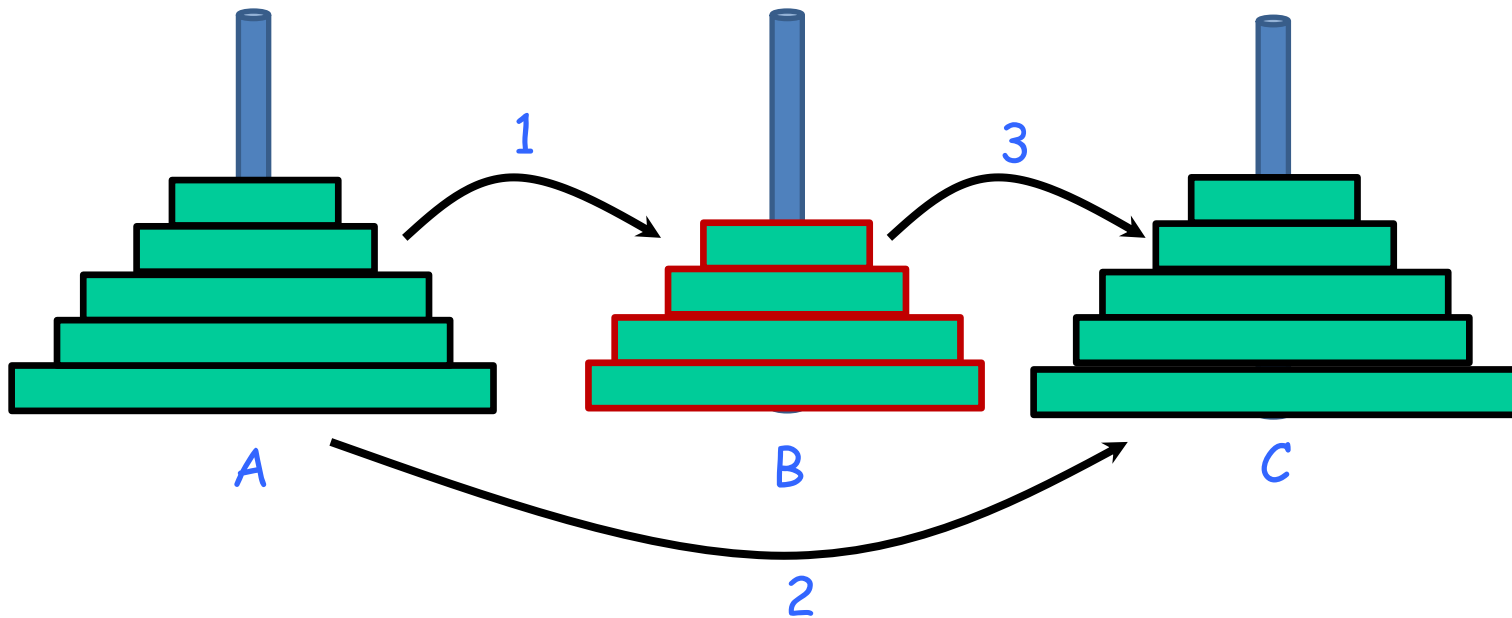


B



C

quanti spostamenti fa l'algoritmo?



$T(n)$: #spostamenti che l'alg fa nel caso peggiore (?) per spostare n dischi

Hanoi(dischi, destinazione, palo ausiliario)

Hanoi ([1,2...,n], C, B)

1. if $n=1$ then sposta il disco su C

2. Hanoi([1,2,...,n-1], B, C)

3. sposta il disco n su C

4. Hanoi([1,2,...,n-1], C, A)

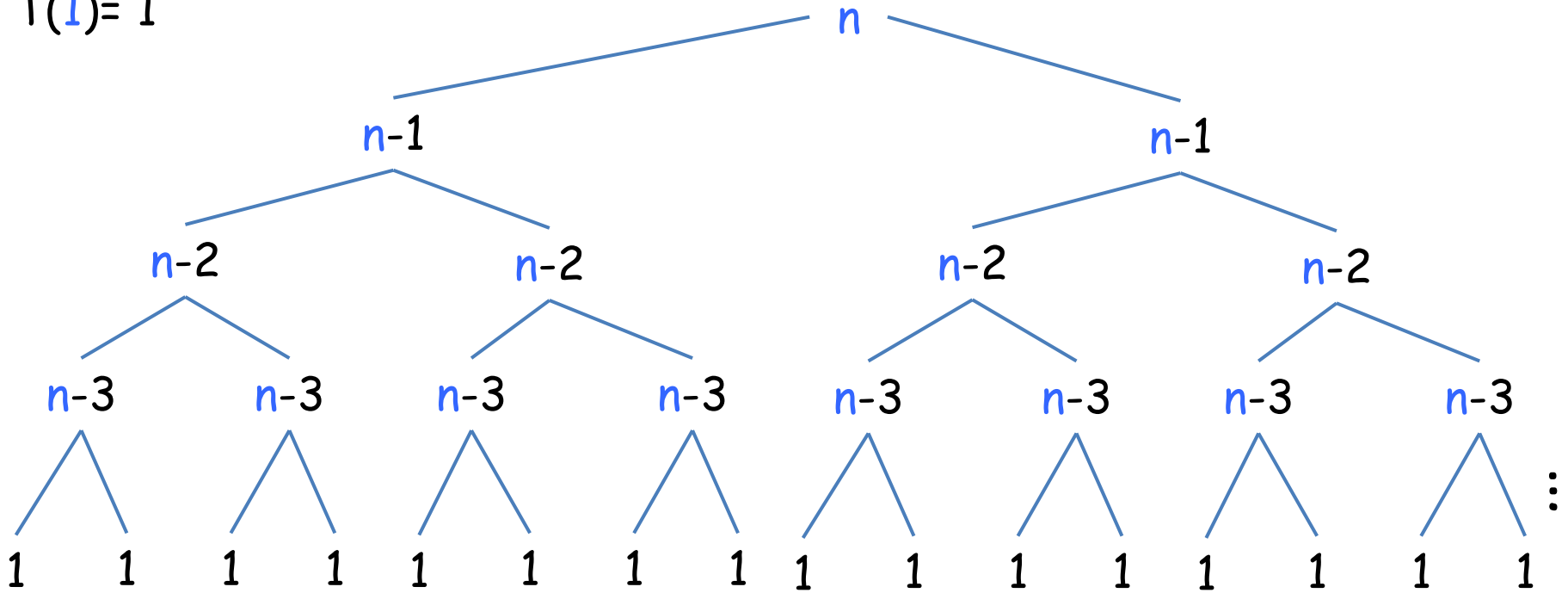
$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$T(1) = 1$$

analisi (tecnica albero della ricorsione)

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$T(1) = 1$$



albero binario completo!

quanti spostamenti fa ogni nodo? ...uno!

quanto è alto l'albero?

...n-1!

$$\Rightarrow T(n) = 2^n - 1 = \Theta(2^n)$$

quanti nodi ha un albero binario completo di altezza h?

$$\sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1} - 1$$