

# Algoritmi e Strutture Dati

Luciano Gualà

[guala@mat.uniroma2.it](mailto:guala@mat.uniroma2.it)

[www.mat.uniroma2.it/~guala](http://www.mat.uniroma2.it/~guala)

## Esercizio

Analizzare la complessità nel caso medio del primo algoritmo di pesatura (**Alg1**) presentato nella prima lezione. Rispetto alla distribuzione di probabilità sulle istanze, si assuma che la moneta falsa possa trovarsi in modo equiprobabile in una qualsiasi delle  $n$  posizioni.

Alg1 ( $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ )

1. **for**  $i=2$  **to**  $n$  **do**
2.     **if**  $\text{peso}(x_1) > \text{peso}(x_i)$  **then return**  $x_1$
3.     **if**  $\text{peso}(x_1) < \text{peso}(x_i)$  **then return**  $x_i$

$$\sum_{\mathbf{I} \text{ di dim } n} \Pr(\mathbf{I}) \# \text{pesate}(\mathbf{I}) =$$

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{\Pr(\text{"moneta falsa è in posizione } j \text{ in } \mathbf{I}\text{"})}_{1/n} \underbrace{\# \text{pesate}(\mathbf{I})}_{\substack{1 \text{ se } j=1, \\ j-1 \text{ altrimenti}}} = (1/n) \left( 1 + \sum_{j=2}^n (j-1) \right)$$

$$= (1/n) \left( 1 + \sum_{j=1}^{n-1} j \right) = (1/n) \left( 1 + (n-1) \frac{n}{2} \right) = 1/n + (n-1)/2$$

# Un problema simile: ricerca di un elemento in un array/lista non ordinata

l'algoritmo torna la posizione di  $x$  in  $L$  se  $x$  è presente, -1 altrimenti

**algoritmo** RicercaSequenziale(array  $L$ , elem  $x$ )  $\rightarrow$  intero

1.  $n =$  lunghezza di  $L$
2.  $i=1$
3. **for**  $i=1$  to  $n$  **do**
4.     **if** ( $L[i]=x$ ) **then return**  $i$  *//trovato*
5. **return**  $-1$  *//non trovato*

$$T_{\text{best}}(n) = 1$$

$x$  è in prima posizione

$$T_{\text{worst}}(n) = n$$

$x \notin L$  oppure è in ultima posizione

$$T_{\text{avg}}(n) = (n+1)/2$$

assumendo che  $x \in L$  e che si trovi con la stessa probabilità in una qualsiasi posizione

# Una variante: ricerca di un elemento in un array/lista ordinata

Algoritmo di **ricerca binaria**: uno strumento molto potente

gli indici  $i$  e  $j$  indicano la porzione di  $L$  in cui cercare l'elemento  $x$

l'algoritmo torna la posizione di  $x$  in  $L$ , se  $x$  c'è, -1 altrimenti

**algoritmo** RicercaBinariaRic(array  $L$ , elem  $x$ , int  $i$ , int  $j$ ) -> intero

1. **if** ( $i > j$ ) **then return** -1
2.  $m = \lfloor (i+j)/2 \rfloor$
3. **if** ( $L[m] = x$ ) **then return**  $m$
4. **if** ( $L[m] > x$ ) **then return** RicercaBinariaRic( $L$ ,  $x$ ,  $i$ ,  $m-1$ )
5. **else return** RicercaBinariaRic( $L$ ,  $x$ ,  $m+1$ ,  $j$ )

$$T(n) = T(n/2) + O(1) \quad \longrightarrow \quad T(n) = O(\log n)$$

# Esempi su un array di 9 elementi

0	1	2	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

0	1	2	4
---	---	---	---

2	4
---	---

0	1	2	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

0	1	2	4
---	---	---	---

0	1	2	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

6	7	8	9
---	---	---	---

8	9
---	---

9
---

0	1	2	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

0	1	2	4
---	---	---	---

2	4
---	---

4
---

Cerca 2

Cerca 1

Cerca 9

Cerca 3

$3 < 4$  quindi  $i$  e  $j$  si  
invertono

ricorsione, tecniche di  
progettazione e equazioni di  
ricorrenza

# Sommario

- Algoritmi ricorsivi: come analizzarli?
- Complessità di algoritmi ricorsivi e equazioni di ricorrenza
- Una tecnica di progettazione algoritmica: *divide et impera*
- Metodi per risolvere equazioni di ricorrenza:
  - iterazione
  - albero della ricorsione
  - sostituzione
  - teorema Master
  - cambiamento di variabile

# Algoritmi ricorsivi: come analizzarli?

**algoritmo** fibonacci2(*intero n*) → *intero*

**if** ( $n \leq 2$ ) **then return** 1

**else return** fibonacci2( $n-1$ ) + fibonacci2( $n-2$ )

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + O(1)$$



# Algoritmi ricorsivi: come analizzarli?

Algoritmo di **ricerca binaria**: uno strumento molto potente

gli indici  $i$  e  $j$  indicano la porzione di  $L$  in cui cercare l'elemento  $x$

l'algoritmo torna la posizione di  $x$  in  $L$ , se  $x$  c'è, -1 altrimenti

```
algoritmo RicercaBinariaRic(array  $L$ , elem  $x$ , int  $i$ , int  $j$ ) -> intero
```

```
1. if ( $i > j$ ) then return -1
```

```
2.  $m = \lfloor (i+j)/2 \rfloor$ 
```

```
3. if ( $L[m] = x$ ) then return  $m$ 
```

```
4. if ( $L[m] > x$ ) then return RicercaBinariaRic( $L$ ,  $x$ ,  $i$ ,  $m-1$ )
```

```
5. else return RicercaBinariaRic( $L$ ,  $x$ ,  $m+1$ ,  $j$ )
```

$$T(n) = T(n/2) + O(1)$$

# Algoritmi ricorsivi: come analizzarli?

Alg4 (X)

1. **if** ( $|X|=1$ ) **then** return unica moneta in X
2. dividi X in tre gruppi  $X_1, X_2, X_3$  di dimensione bilanciata siano  $X_1$  e  $X_2$  i gruppi che hanno la stessa dimensione (ci sono sempre)
3. **if**  $\text{peso}(X_1) = \text{peso}(X_2)$  **then return** Alg4( $X_3$ )
4. **if**  $\text{peso}(X_1) > \text{peso}(X_2)$  **then return** Alg4( $X_1$ )  
**else return** Alg4( $X_2$ )

$$T(n) = T(n/3) + O(1)$$

# Equazioni di ricorrenza

la **complessità computazionale** di un algoritmo ricorsivo può essere espressa in modo naturale attraverso una **equazione di ricorrenza**

**esempi:**

$$T(n) = T(n/3) + 2T(n/4) + O(n \log n)$$

$$T(n) = T(n-1) + O(1)$$

$$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$$

casi base:  
 $T(\text{costante}) = \text{cost}$   
(a volte  $T(1) = 1$ )

# Metodo dell'iterazione

**Idea:** "srotolare" la ricorsione, ottenendo una sommatoria dipendente solo dalla dimensione  $n$  del problema iniziale

Esempio:  $T(n) = c + T(n/2)$

$$T(n/2) = c + T(n/4) \quad \dots$$

➔

$$\begin{aligned} T(n) &= c + T(n/2) \\ &= 2c + T(n/4) \\ &= 2c + c + T(n/8) \\ &= 3c + T(n/8) \\ &\dots \\ &= ic + T(n/2^i) \end{aligned}$$

Per  $i = \log_2 n$ :  $T(n) = c \log_2 n + T(1) = \Theta(\log n)$

# Metodo dell'iterazione

Esempio:  $T(n) = T(n-1) + 1$

$$\begin{aligned}T(n) &= T(n-1) + 1 \\&= T(n-2) + 1 + 1 \\&= T(n-2) + 2 \\&= T(n-3) + 1 + 2 \\&= T(n-3) + 3 \\&= T(n-4) + 4 \\&\dots \\&= T(n-i) + i\end{aligned}$$

Per  $i=n-1$ :  $T(n) = T(1) + n-1 = \Theta(n)$

# Metodo dell'iterazione

Esempio:  $T(n) = 2T(n-1)+1$

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$= 2(2T(n-2)+1) + 1$$

$$= 4T(n-2)+2+1$$

$$= 4(2T(n-3)+1)+2+1$$

$$= 8T(n-3)+4+2+1$$

$$= 16T(n-4)+8+4+2+1$$

...

$$= 2^i T(n-i) + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j$$

per  $i=n-1$

$$T(n) = 2^{n-1} T(1) + \sum_{j=0}^{n-2} 2^j = \Theta(2^n)$$

# Metodo dell'iterazione

Esempio:  $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$$

$$= T(n-2) + T(n-3) + 1 + T(n-3) + T(n-4) + 1 + 1$$

$$= T(n-2) + 2T(n-3) + T(n-4) + 3$$

$$= T(n-3) + T(n-4) + 1 + 2(T(n-4) + T(n-5) + 1) + T(n-5) + T(n-6) + 1 + 3$$

$$= T(n-3) + 3T(n-4) + 3T(n-5) + T(n-6) + 7$$

...



???

# Esercizi

risolvere usando il metodo dell'iterazione:

**Esercizio 1:**  $T(n) = T(n-1) + n,$   
 $T(1) = 1$

**Esercizio 2:**  $T(n) = 9 T(n/3) + n,$   
 $T(1) = 1$

(soluzione sul libro di testo: Esempio 2.4)



# Analisi dell'albero della ricorsione

(un modo grafico di pensare il metodo dell'iterazione)

## Idea:

- disegnare l'albero delle chiamate ricorsive indicando la dimensione di ogni nodo
- stimare il tempo speso da ogni nodo dell'albero
- stimare il tempo complessivo "sommando" il tempo speso da ogni nodo

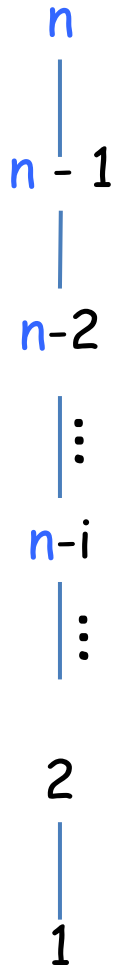
**Suggerimento 1:** se il tempo speso da ogni nodo è costante,  $T(n)$  è proporzionale al numero di nodi

**Suggerimento 2:** a volte conviene analizzare l'albero per livelli:  
-analizzare il tempo speso su ogni livello (fornendo upper bound)  
-stimare il numero di livelli

# tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = T(n-1) + 1$$

$$T(1) = 1$$



quanto costa ogni nodo?

...uno!

quanti nodi ha l'albero?

n

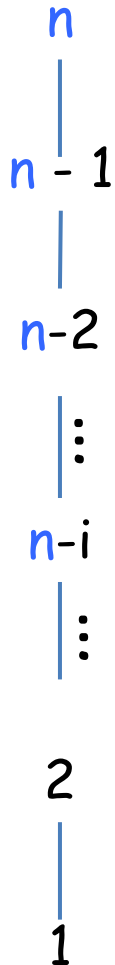


$$T(n) = \Theta(n)$$

# tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$T(1) = 1$$



quanto costa ogni nodo?

al più n

quanti nodi ha l'albero?

n



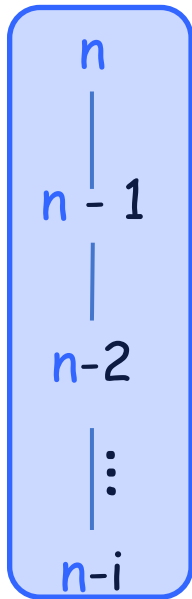
$$T(n) = O(n^2)$$

vale  $T(n) = \Theta(n^2)$  ?

# tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$T(1) = 1$$



$n/2$  nodi  
ognuno dei  
quali costa  
 $\geq n/2$

quanto costa ogni nodo? al più  $n$   
quanti nodi ha l'albero?  $n$




$$T(n) = O(n^2)$$

vale  $T(n) = \Theta(n^2)$  ?



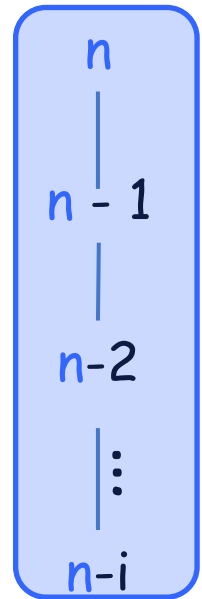
$$T(n) \geq n/2 \cdot n/2 = n^2/4$$

  $T(n) = \Omega(n^2)$

# tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = T(n-1) + n$$

$$T(1) = 1$$



$n/2$  nodi  
ognuno dei  
quali costa  
 $\geq n/2$

quanto costa ogni nodo?  
quanti nodi ha l'albero?

al più  $n$   
 $n$



$$T(n) = O(n^2)$$

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

$\vdots$

2

1

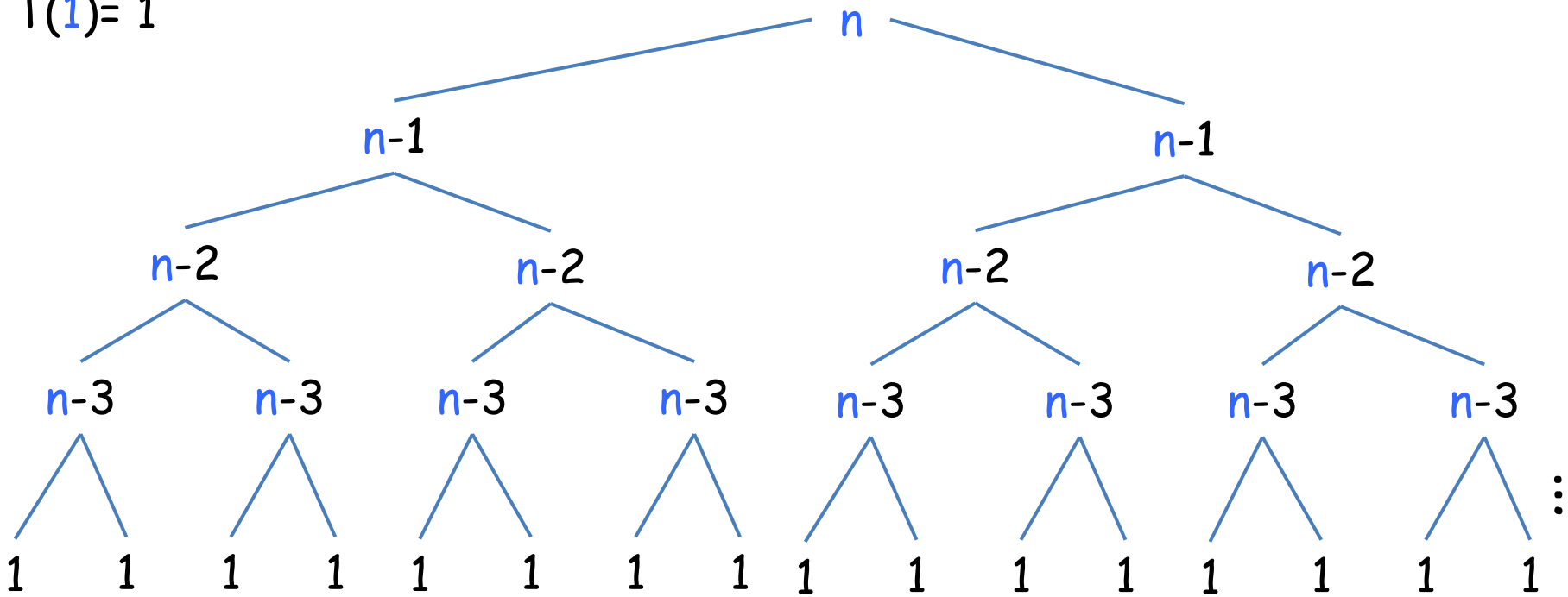
$$T(n) \geq n/2 \cdot n/2 = n^2/4$$

$\Rightarrow T(n) = \Omega(n^2)$

# tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$T(1) = 1$$



albero binario completo!

- quanto costa ogni nodo?
- quanto è alto l'albero?
- quanti nodi ha un albero binario completo di altezza h?

...uno!

...n-1!

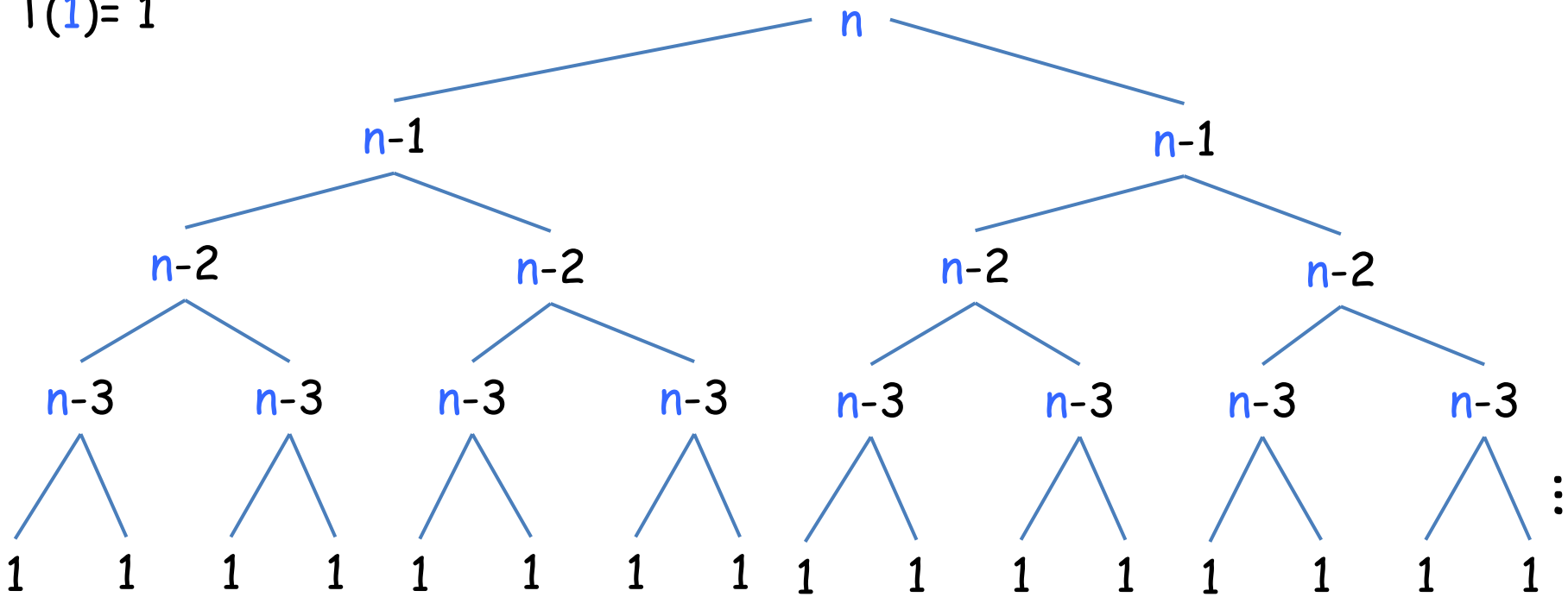
➔  $T(n) = 2^n - 1 = \Theta(2^n)$

$$\sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1} - 1$$

# tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = 2T(n-1) + n$$

$$T(1) = 1$$



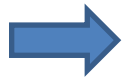
albero binario completo!

- quanto costa ogni nodo?
- quanto è alto l'albero?
- quanti nodi ha un albero binario completo di altezza  $h$ ?

...al più  $n$

... $n-1$

$$\sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1} - 1$$



$$T(n) \leq n2^n = \Theta(n2^n)$$

$$T(n) = O(n2^n)$$

# tecnica albero della ricorsione

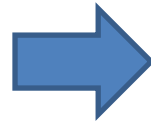
$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$$

$$T(1) = 1$$

Un'idea: usare maggiorazioni per fornire upper bound

$$T(n) \leq R(n)$$

$$R(n) = 2R(n-1) + 1$$



$$T(n) = O(2^n)$$



$$R(n) = \Theta(2^n)$$

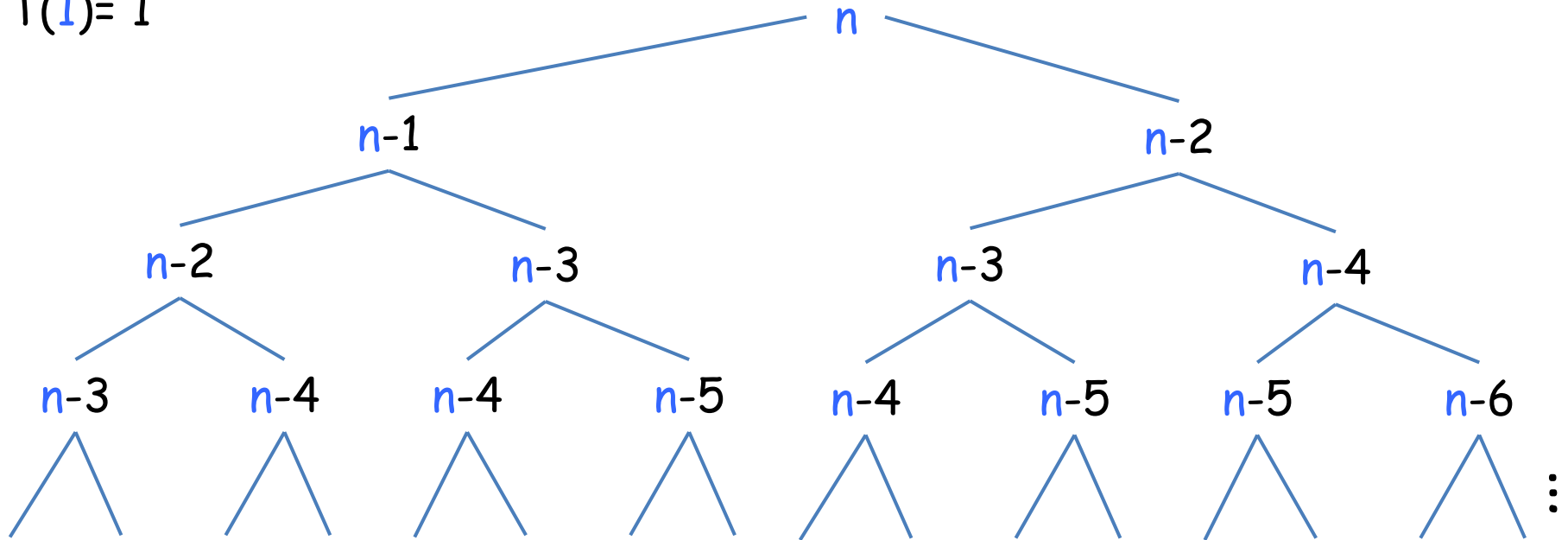
vale  $T(n) = \Theta(2^n)$  ?



# tecnica albero della ricorsione

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$$

$$T(1) = 1$$



albero chiamate ricorsive dell'algoritmo Fibonacci 2!

quanto costa ogni nodo?

...uno

quanti nodi ha l'albero?

$\Theta(\phi^n)$



$$T(n) = \Theta(\phi^n)$$

$$[T(n) = o(2^n)]$$

# Analisi dell'albero della ricorsione

due esempi:

$$\text{Esempio 1: } T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n, \\ T(1) = 1$$

$$\text{Esempio 2: } T(n) = 2 T(n-2) + 1, \\ T(1) = 1$$

# Sommario

- Algoritmi ricorsivi: come analizzarli?
- Complessità di algoritmi ricorsivi e equazioni di ricorrenza
- Una tecnica di progettazione algoritmica: divide et impera
- Metodi per risolvere equazioni di ricorrenza:
  - iterazione
  - albero della ricorsione
  - sostituzione
  - teorema Master
  - cambiamento di variabile

# Metodo della sostituzione

Idea:

1. indovinare la (forma della) soluzione
2. usare induzione matematica per provare che la soluzione è quella intuita
3. risolvi rispetto alle costanti

# Metodo della sostituzione

Esempio:  $T(n) = n + T(n/2)$ ,  $T(1)=1$

Assumiamo che la soluzione sia  $T(n) \leq cn$  per una costante  $c$  opportuna

Passo base:  $T(1)=1 \leq c \cdot 1$  per ogni  $c \geq 1$

Passo induttivo:

$$T(n) = n + T(n/2) \leq n + c(n/2) = (c/2 + 1)n$$

Quindi: quando  $T(n) \leq cn$ ?

devo avere:  $c/2 + 1 \leq c$

da cui segue:  $c \geq 2$

$$T(n) \leq 2n \quad \longrightarrow \quad T(n) = O(n)$$

# Esercizi

risolvere usando il metodo della sostituzione:

**Esercizio:**  $T(n) = 4T(n/2) + n,$   
 $T(1) = 1$

(...e fare esperienza della tecnicità del metodo.)

# Tecnica del divide et impera

Algoritmi basati sulla tecnica del *divide et impera*:

- dividi il problema (di dimensione  $n$ ) in  $a$  sottoproblemi di dimensione  $n/b$
- risolvi i sottoproblemi ricorsivamente
- ricombina le soluzioni

Sia  $f(n)$  il tempo per dividere e ricombinare istanze di dimensione  $n$ . La relazione di ricorrenza è data da:

$$T(n) = \begin{cases} aT(n/b) + f(n) & \text{se } n > 1 \\ \Theta(1) & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

# Algoritmo Fibonacci6

**algoritmo** fibonacci6(*intero*  $n$ )  $\rightarrow$  *intero*

1.  $A \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2.  $M \leftarrow \text{potenzaDiMatrice}(A, n - 1)$
3. **return**  $M[0][0]$

**funzione** potenzaDiMatrice(*matrice*  $A$ , *intero*  $k$ )  $\rightarrow$  *matrice*

4. **if** ( $k \leq 1$ ) **then**  $M \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. **else**  $M \leftarrow \text{potenzaDiMatrice}(A, \lfloor k/2 \rfloor)$
6.  $M \leftarrow M \cdot M$
7. **if** ( $k$  è dispari) **then**  $M \leftarrow M \cdot A$
8. **return**  $M$

$$a=1, b=2, f(n)=O(1)$$



# Algoritmo ottimo di pesatura

Alg4 (X)

1. **if** ( $|X|=1$ ) **then** return unica moneta in X
2. dividi X in tre gruppi  $X_1, X_2, X_3$  di dimensione bilanciata siano  $X_1$  e  $X_2$  i gruppi che hanno la stessa dimensione (ci sono sempre)
3. **if**  $\text{peso}(X_1) = \text{peso}(X_2)$  **then return** Alg4( $X_3$ )
4. **if**  $\text{peso}(X_1) > \text{peso}(X_2)$  **then return** Alg4( $X_1$ )  
**else return** Alg4( $X_2$ )

$$a=1, b=3, f(n)=O(1)$$

# Teorema Master: enunciato informale

$$n^{\log_b a} \quad \text{vs} \quad f(n)$$

quale va più velocemente a infinito?

Stesso ordine asintotico  $\rightarrow T(n) = \Theta(f(n) \log n)$

Se una delle due è "polinomialmente" più veloce

$\rightarrow T(n)$  ha l'ordine asintotico della più veloce

# Teorema Master

La relazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} aT(n/b) + f(n) & \text{se } n > 1 \\ \Theta(1) & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

ha soluzione:

1.  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$  se  $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$  per  $\varepsilon > 0$
2.  $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$  se  $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
3.  $T(n) = \Theta(f(n))$  se  $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$  per  $\varepsilon > 0$  e  $a f(n/b) \leq c f(n)$  per  $c < 1$  e  $n$  sufficientemente grande

# Esempi

1)  $T(n) = n + 2T(n/2)$

$a=2, b=2, f(n)=n=\Theta(n^{\log_2 2})$   
(caso 2 del teorema master)

$\rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$

2)  $T(n) = c + 3T(n/9)$

$a=3, b=9, f(n)=c=O(n^{\log_9 3 - \epsilon})$   
(caso 1 del teorema master)

$\rightarrow T(n) = \Theta(\sqrt{n})$

3)  $T(n) = n + 3T(n/9)$

$a=3, b=9, f(n)=n=\Omega(n^{\log_9 3 + \epsilon})$

$3(n/9) \leq c n$  per  $c=1/3$   
(caso 3 del teorema master)

$\rightarrow T(n) = \Theta(n)$

# Esempi

$$4) T(n) = n \log n + 2T(n/2)$$

$$a=2, b=2, f(n) = \omega(n^{\log_2 2})$$

$$\text{ma } f(n) \neq \Omega(n^{\log_2 2 + \varepsilon}), \forall \varepsilon > 0$$

non si può applicare  
il teorema Master!

# Cambiamento di variabile

Esempio:  $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(1),$   
 $T(1) = 1$

$$T(n) = T(n^{1/2}) + O(1)$$

$$n=2^x \quad \rightarrow \quad x = \log_2 n$$

$$T(2^x) = T(2^{x/2}) + O(1) \quad R(x) := T(2^x)$$

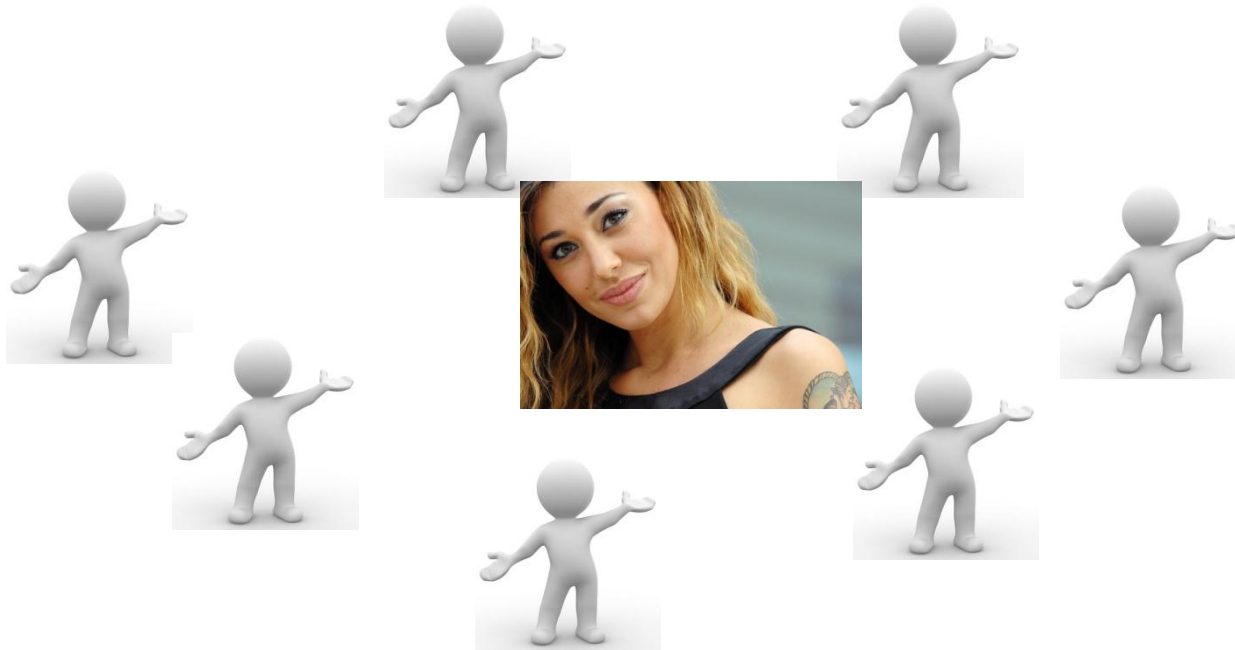
$$R(x) = R(x/2) + O(1) \quad \rightarrow \quad R(x) = O(\log x)$$

$$T(n) = O(\log \log n)$$

# due problemi (per cui la ricorsione può aiutare)

**Esercizio:** progettare due algoritmi ricorsivi per i seguenti due problemi. Se ne studi la complessità temporale (nel caso peggiore).

# problema della celebrità



ad una festa ci sono  $n$  persone  
una di queste è una **celebrità**  
la **celebrità** non conosce nessuno ma è  
conosciuta da tutti

**obiettivo:**  
individuare la celebrità facendo  
(poche) domande a persone del tipo:  
conosci questa persona?



# problema della celebrità: un algoritmo ricorsivo

Celebrità (X)

1. **if**  $|X|=1$  **then return** l'unica persona in X  
% che è la celebrità
2. siano A e B due persone qualsiasi in X:  
**chiedi** ad A se conosce B
3. **if** (A conosce B)  
**then**  
%A non può essere la celebrità  
**return** Celebrità(X-{A})  
**else**  
%B non può essere la celebrità  
**return** Celebrità(X-{B})

X: insieme di persone fra le quali sto cercando la celebrità

quante domande fa l'algoritmo?

$T(n)$ : # domande che l'algoritmo fa nel caso peggiore prima di individuare la celebrità fra  $n$  persone

$$T(n) = T(n-1) + 1 \quad T(1) = 0$$

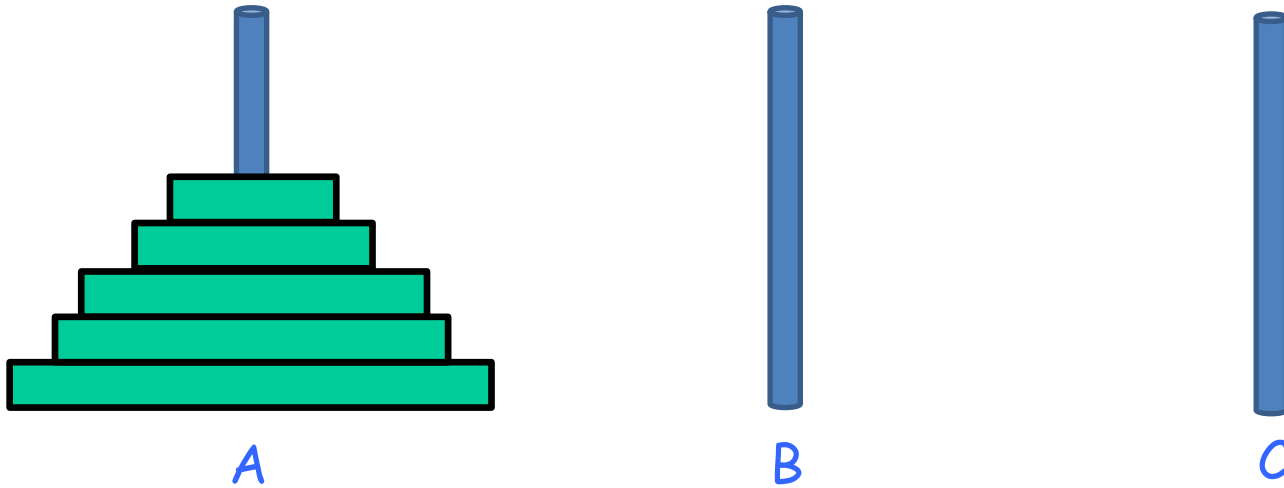
$$T(n) = n - 1$$

(srotolando)



$$T(n) = T(n-1) + 1 = T(n-2) + 2 = T(n-3) + 3 = \dots T(n-i) + i \dots = T(1) + n - 1 = n - 1$$

# La torre di Hanoi

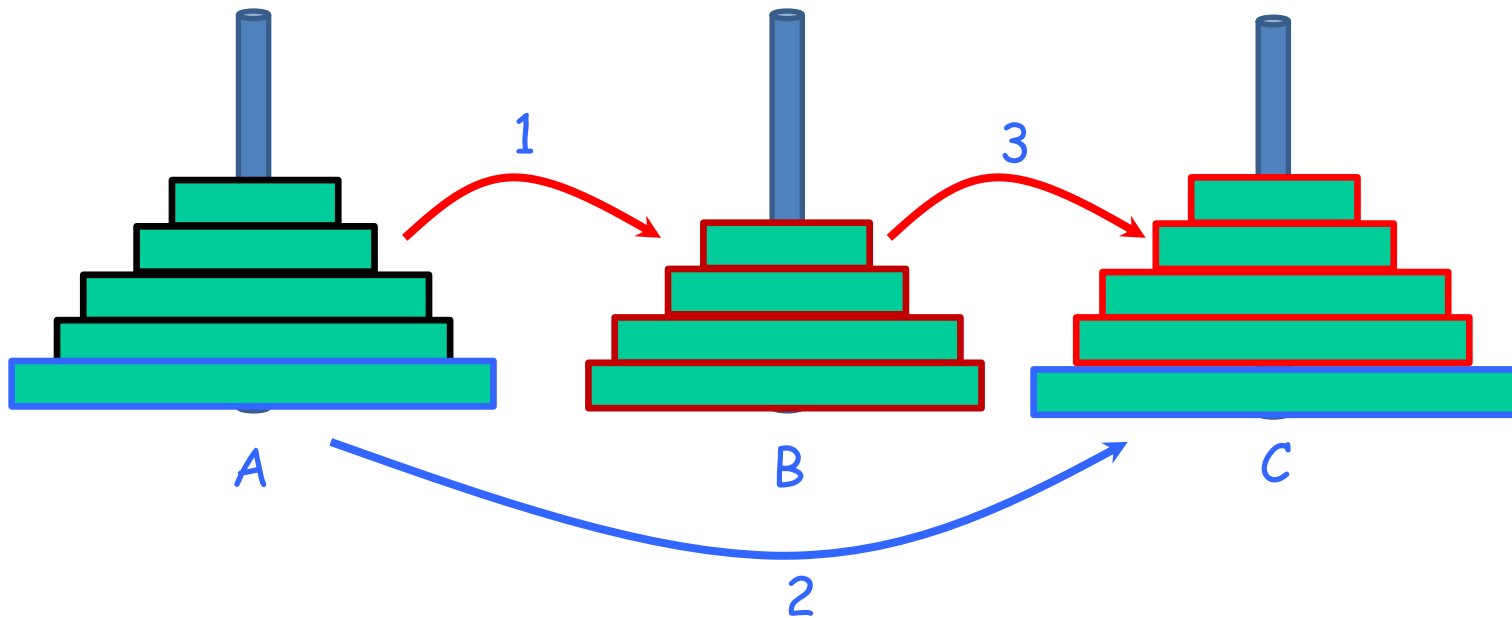


$n$  dischi di diametro diverso, tre pali

**regole:** si può spostare un disco alla volta e **non si può** mettere un disco di diametro più grande **sopra** uno di diametro più piccolo

**obiettivo:** spostare i dischi dal palo **A** al palo **C**  
(facendo meno spostamenti possibile)

# Un'elegante soluzione ricorsiva



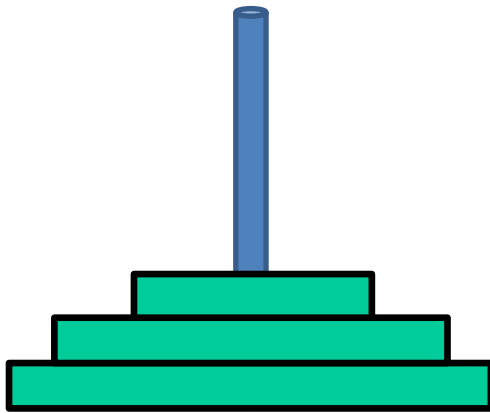
Hanoi(dischi, destinazione, palo ausiliario)

Hanoi ([1,2...,n], C, B)

1. **if** n=1 **then** sposta il disco su C
2. Hanoi([1,2,...,n-1], B, C)
3. sposta il disco n su C
4. Hanoi([1,2,...,n-1], C, A)

# esecuzione dell'algoritmo

$n = 3$



A



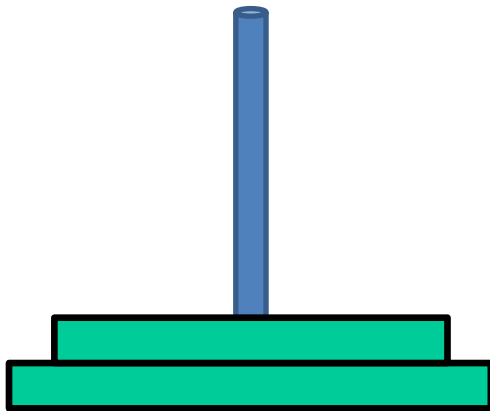
B



C

# esecuzione dell'algoritmo

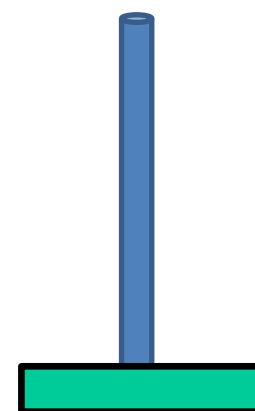
$n = 3$



A



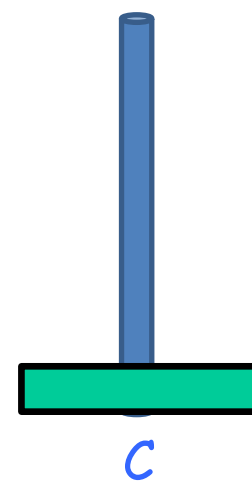
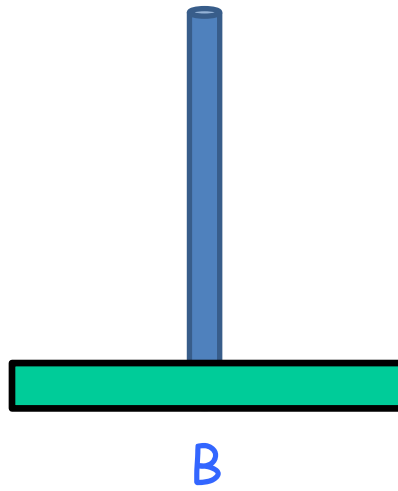
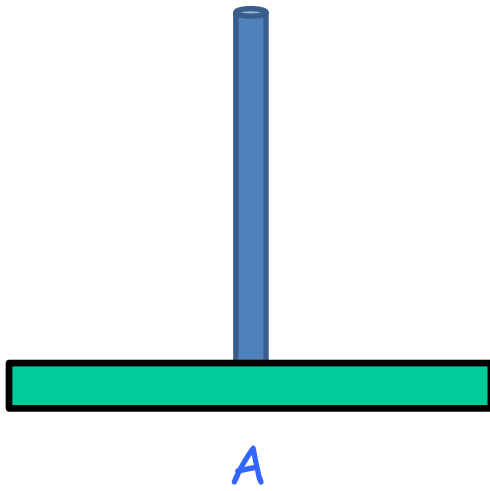
B



C

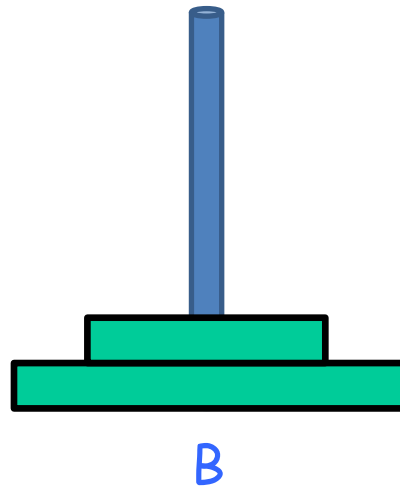
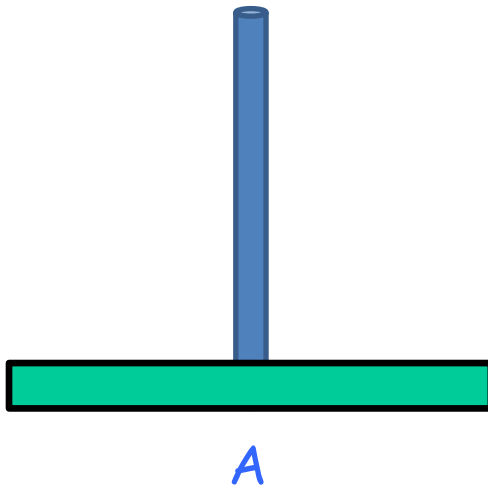
# esecuzione dell'algoritmo

$n = 3$



# esecuzione dell'algoritmo

$n = 3$

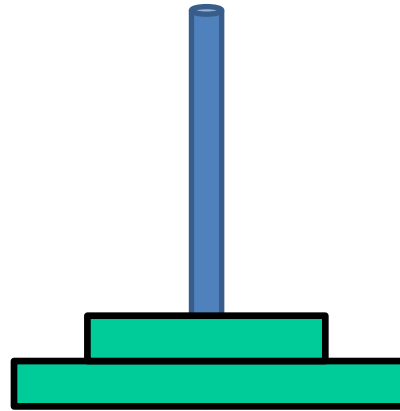


# esecuzione dell'algoritmo

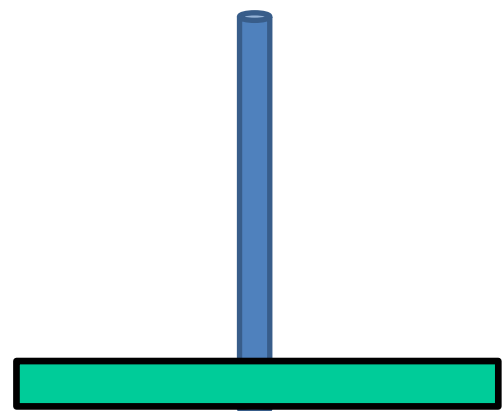
$n = 3$



A



B

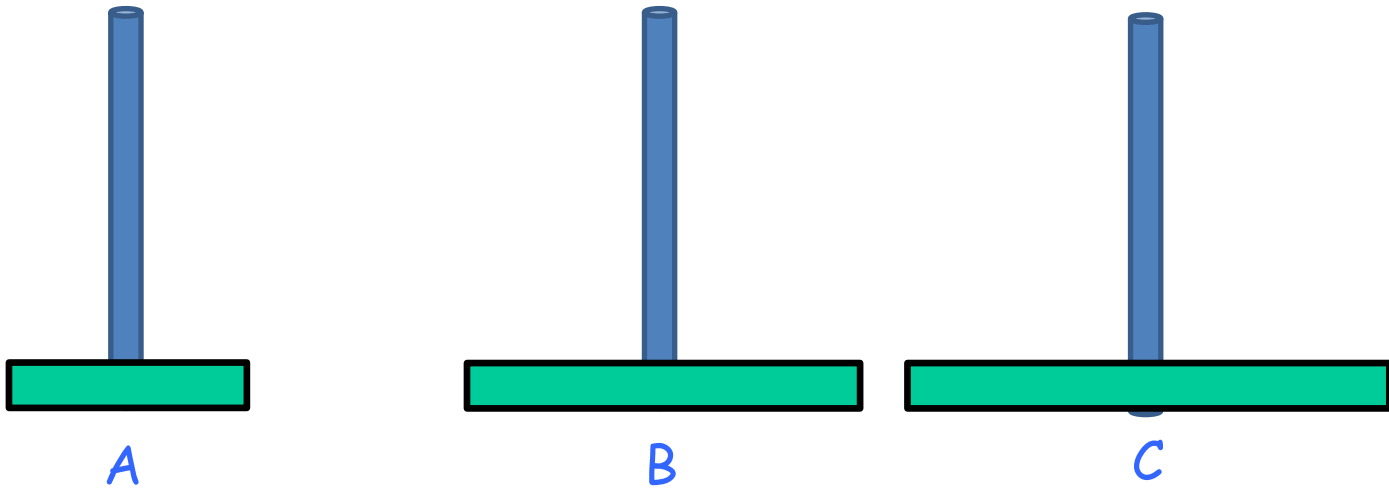


C



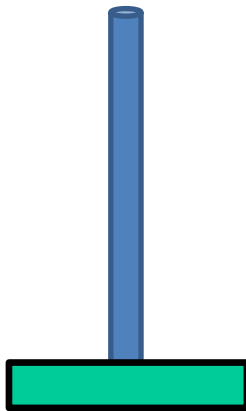
# esecuzione dell'algoritmo

$n = 3$



# esecuzione dell'algoritmo

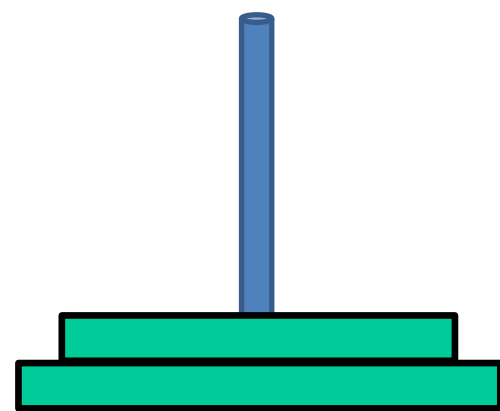
$n = 3$



A



B



C

# esecuzione dell'algoritmo

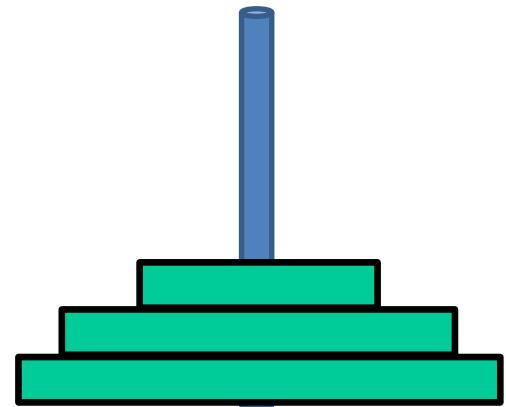
$n = 3$



A



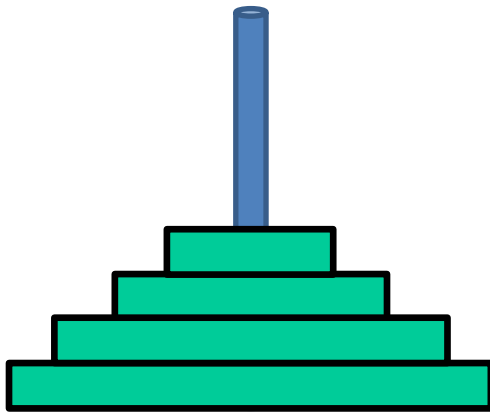
B



C

# esecuzione dell'algoritmo

$n = 4$



A



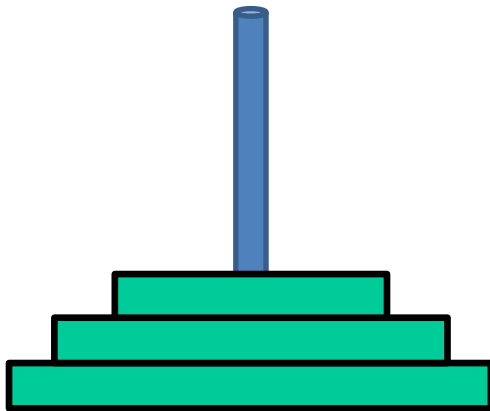
B



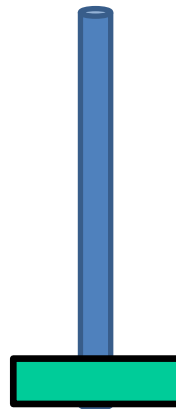
C

# esecuzione dell'algoritmo

$n = 4$



A



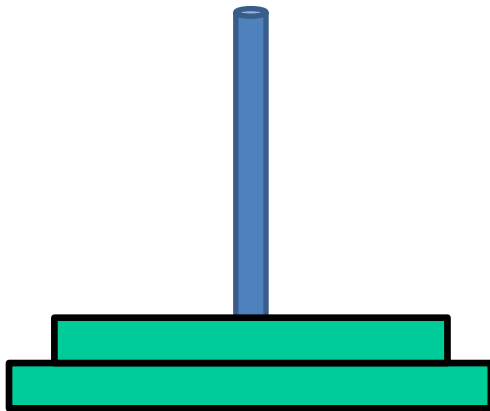
B



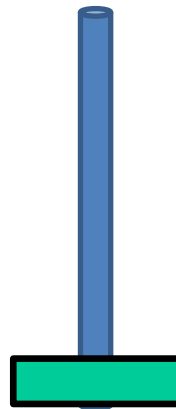
C

# esecuzione dell'algoritmo

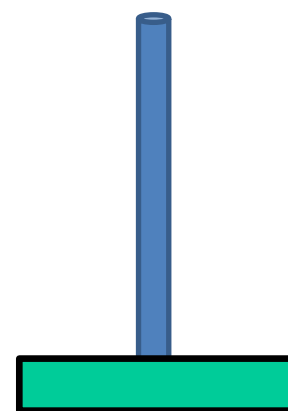
$n = 4$



A



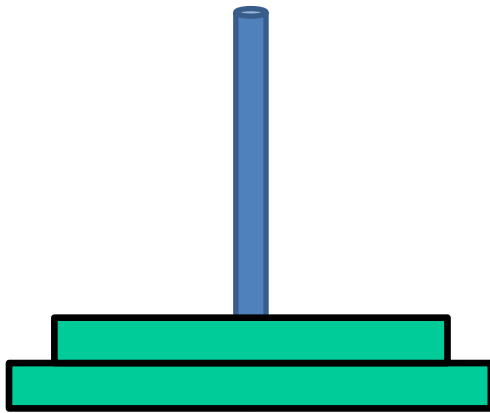
B



C

# esecuzione dell'algoritmo

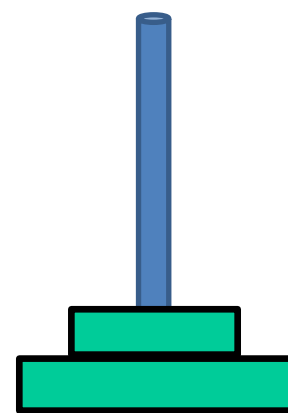
$n = 4$



A



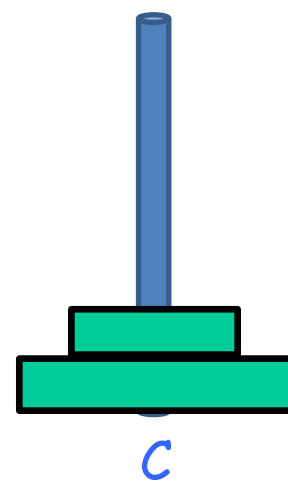
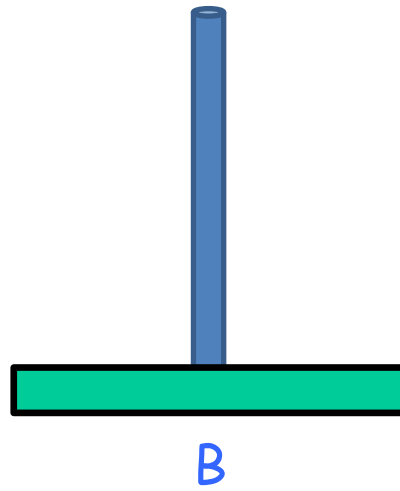
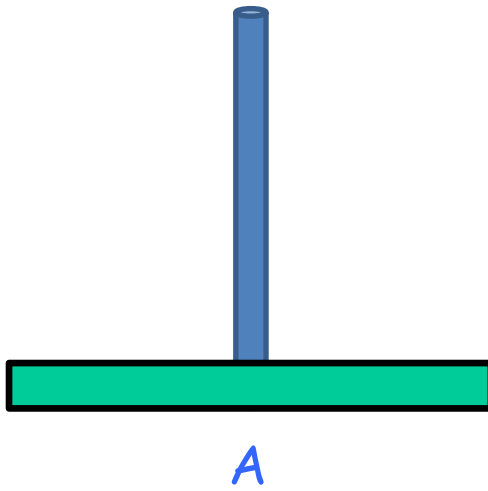
B



C

# esecuzione dell'algoritmo

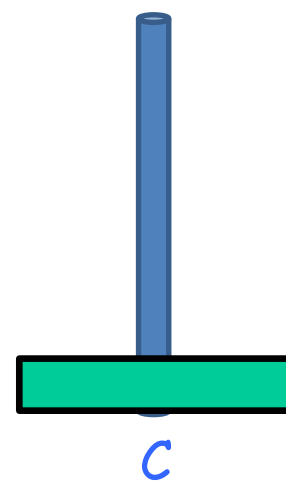
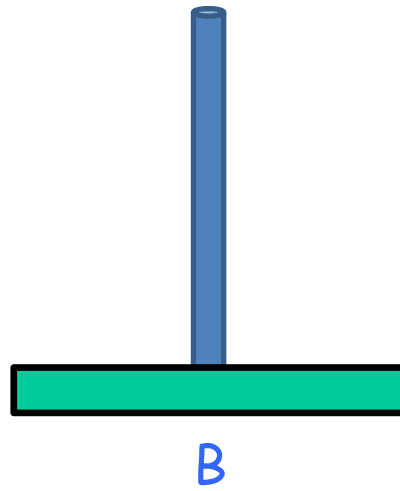
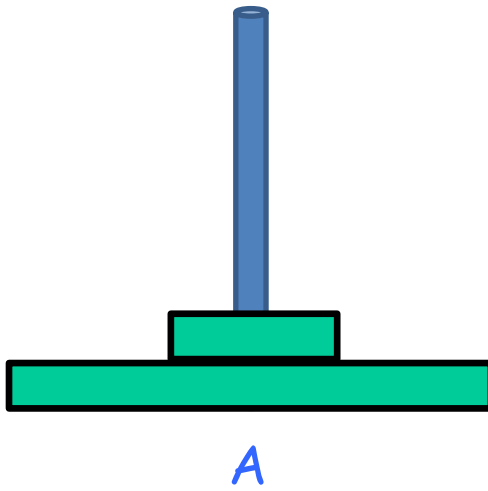
$n = 4$





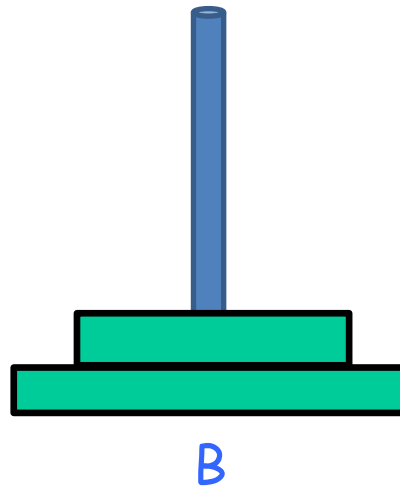
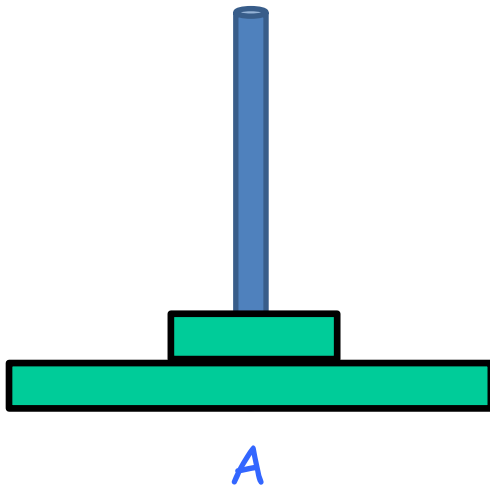
# esecuzione dell'algoritmo

$n = 4$



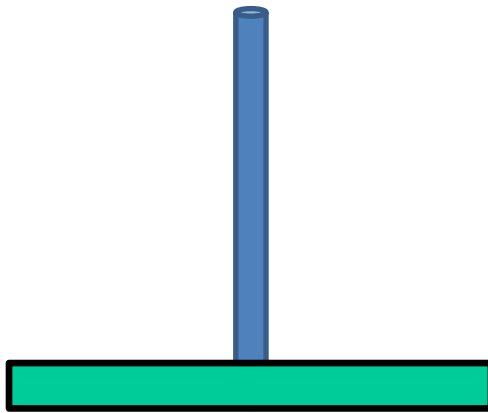
# esecuzione dell'algoritmo

$n = 4$

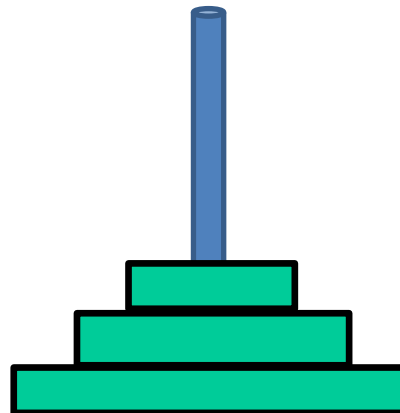


# esecuzione dell'algoritmo

$n = 4$



A



B



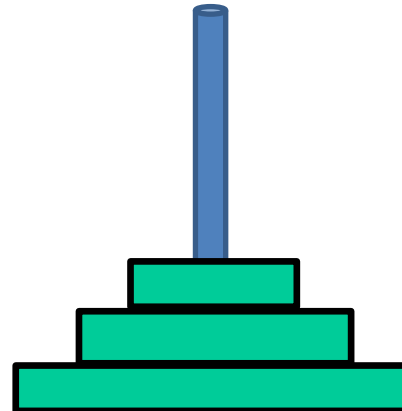
C

# esecuzione dell'algoritmo

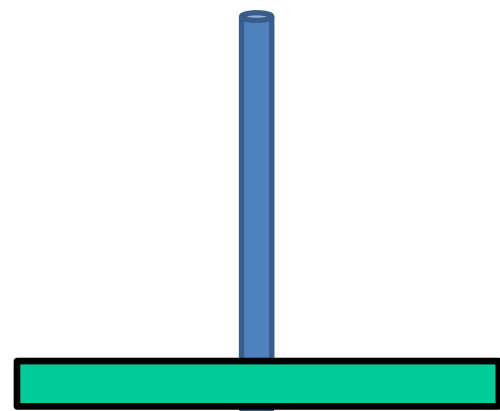
$n = 4$



A



B



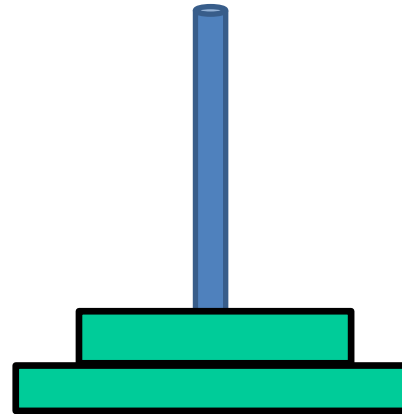
C

# esecuzione dell'algoritmo

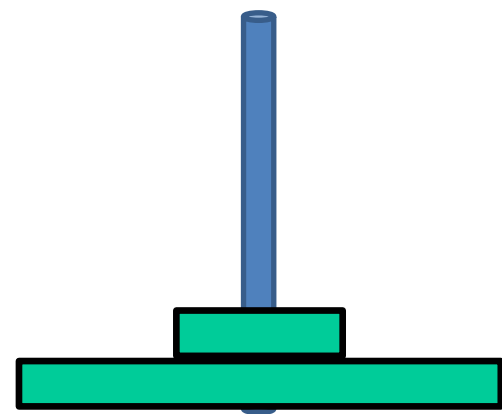
$n = 4$



A



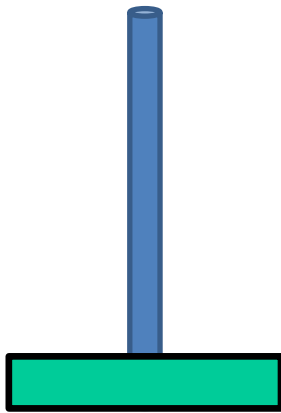
B



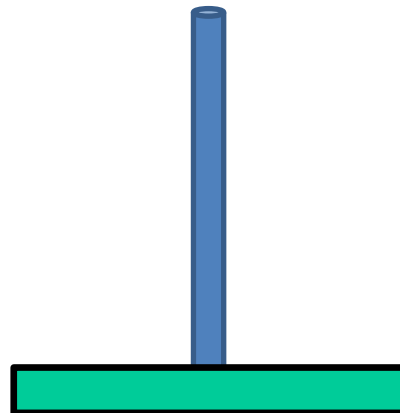
C

# esecuzione dell'algoritmo

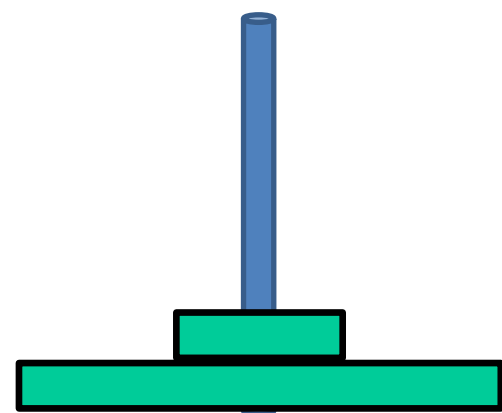
$n = 4$



A



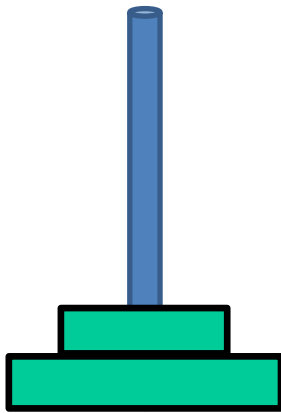
B



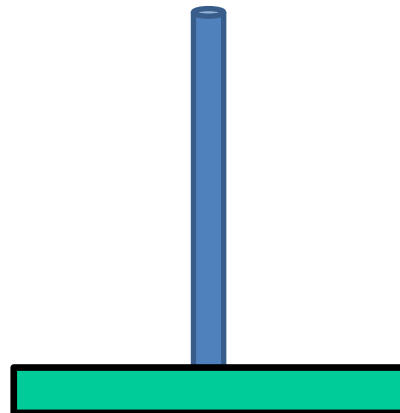
C

# esecuzione dell'algoritmo

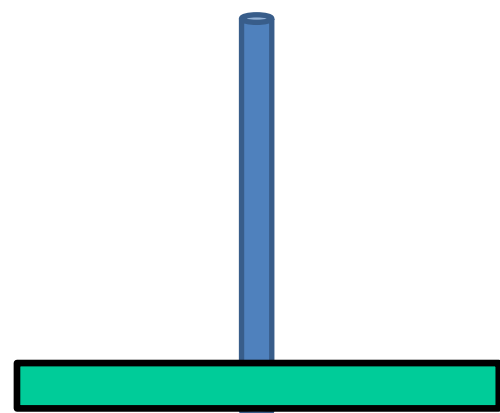
$n = 4$



A



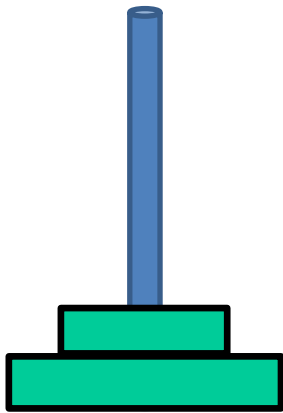
B



C

# esecuzione dell'algoritmo

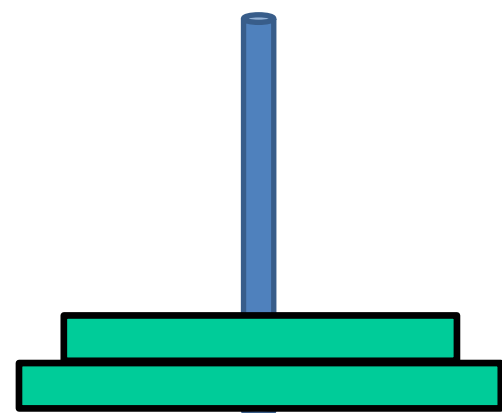
$n = 4$



A



B

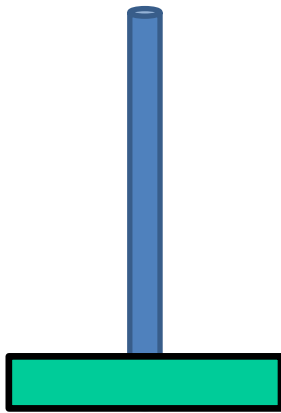


C

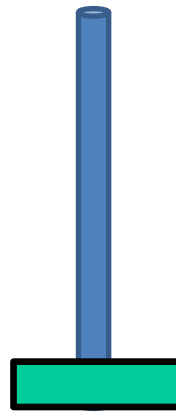


# esecuzione dell'algoritmo

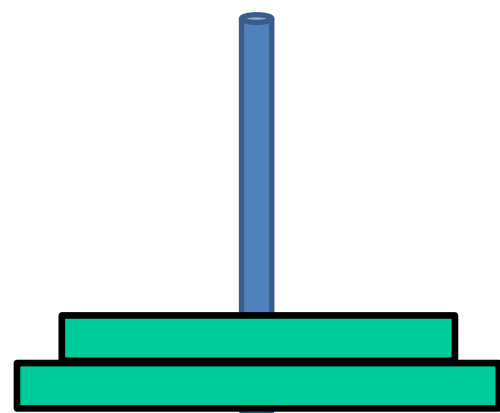
$n = 4$



A



B



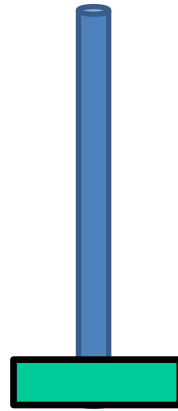
C

# esecuzione dell'algoritmo

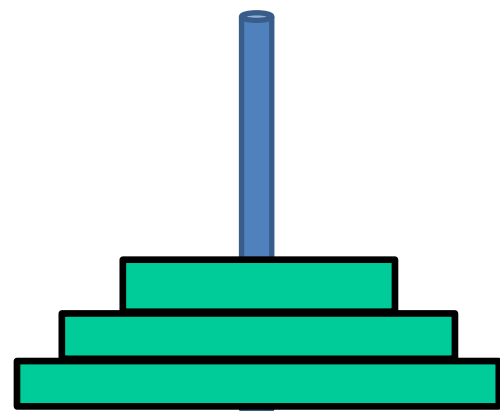
$n = 4$



A



B



C

# esecuzione dell'algoritmo

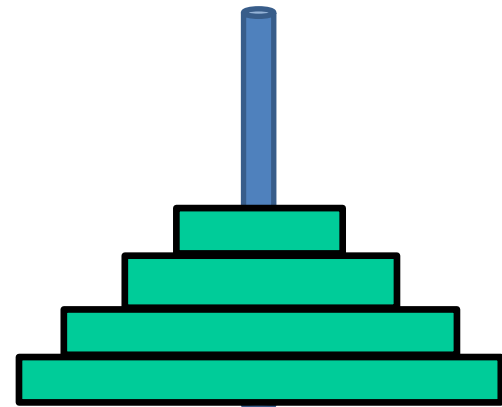
$n = 4$



A

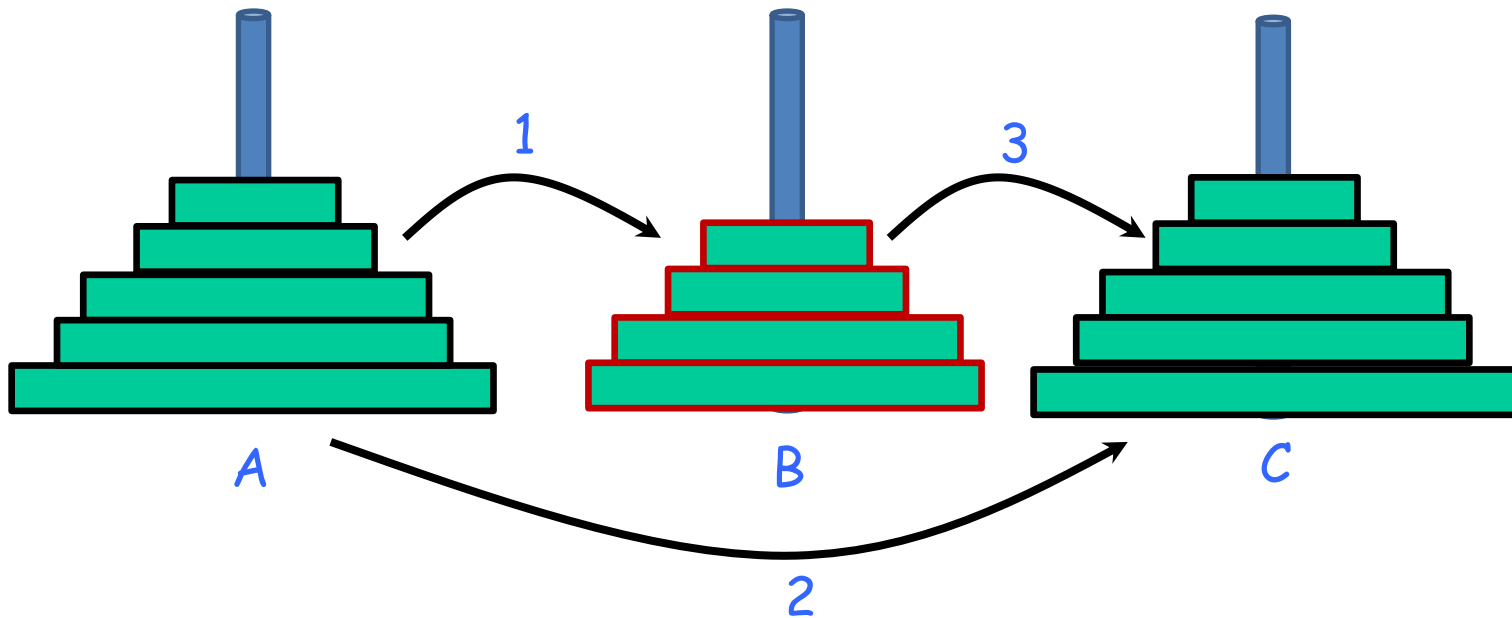


B



C

# quanti spostamenti fa l'algoritmo?



$T(n)$ : #spostamenti che l'alg fa nel caso peggiore (?) per spostare  $n$  dischi

Hanoi(dischi, destinazione, palo ausiliario)

Hanoi ([1,2,..,n], C, B)

1. if  $n=1$  then sposta il disco su C

2. Hanoi([1,2,...,n-1], B, C)

3. sposta il disco  $n$  su C

4. Hanoi([1,2,...,n-1], C, A)

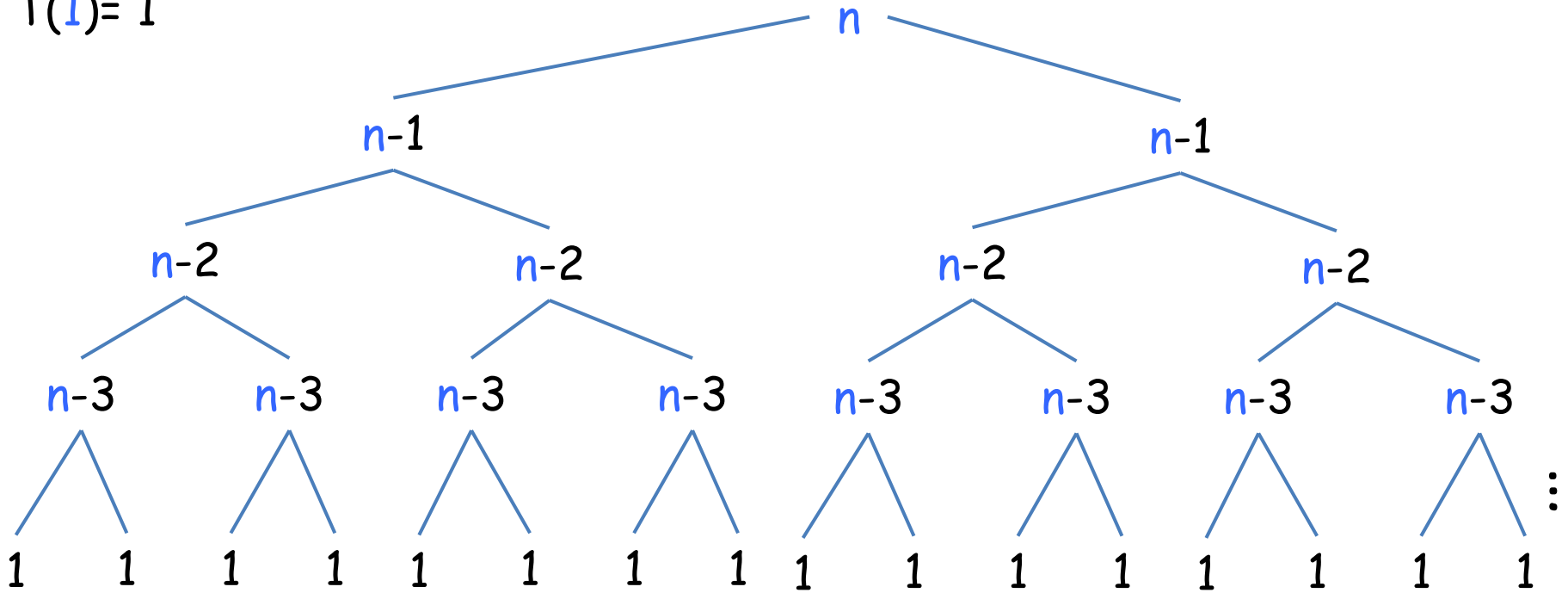
$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$T(1) = 1$$

# analisi (tecnica albero della ricorsione)

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$T(1) = 1$$



albero binario completo!

quanti spostamenti fa ogni nodo? ...uno!

quanto è alto l'albero?

...n-1!

$$\Rightarrow T(n) = 2^n - 1 = \Theta(2^n)$$

quanti nodi ha un albero binario completo di altezza h?

$$\sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1} - 1$$