

# Algoritmi e Strutture Dati

## Capitolo 1

Un'introduzione informale  
agli algoritmi

# Ancora un esempio di problema e soluzioni algoritmiche: i numeri di Fibonacci

...verso un modello di calcolo  
più simile a un computer  
(rispetto alla bilancia o alla padella)

...ragionare in modo più qualitativo  
sulla complessità temporale  
degli algoritmi

# L'isola dei conigli

Leonardo da Pisa (anche noto come Fibonacci) si interessò di molte cose, tra cui il seguente problema di dinamica delle popolazioni:

Quanto velocemente si espanderebbe una popolazione di conigli sotto appropriate condizioni?

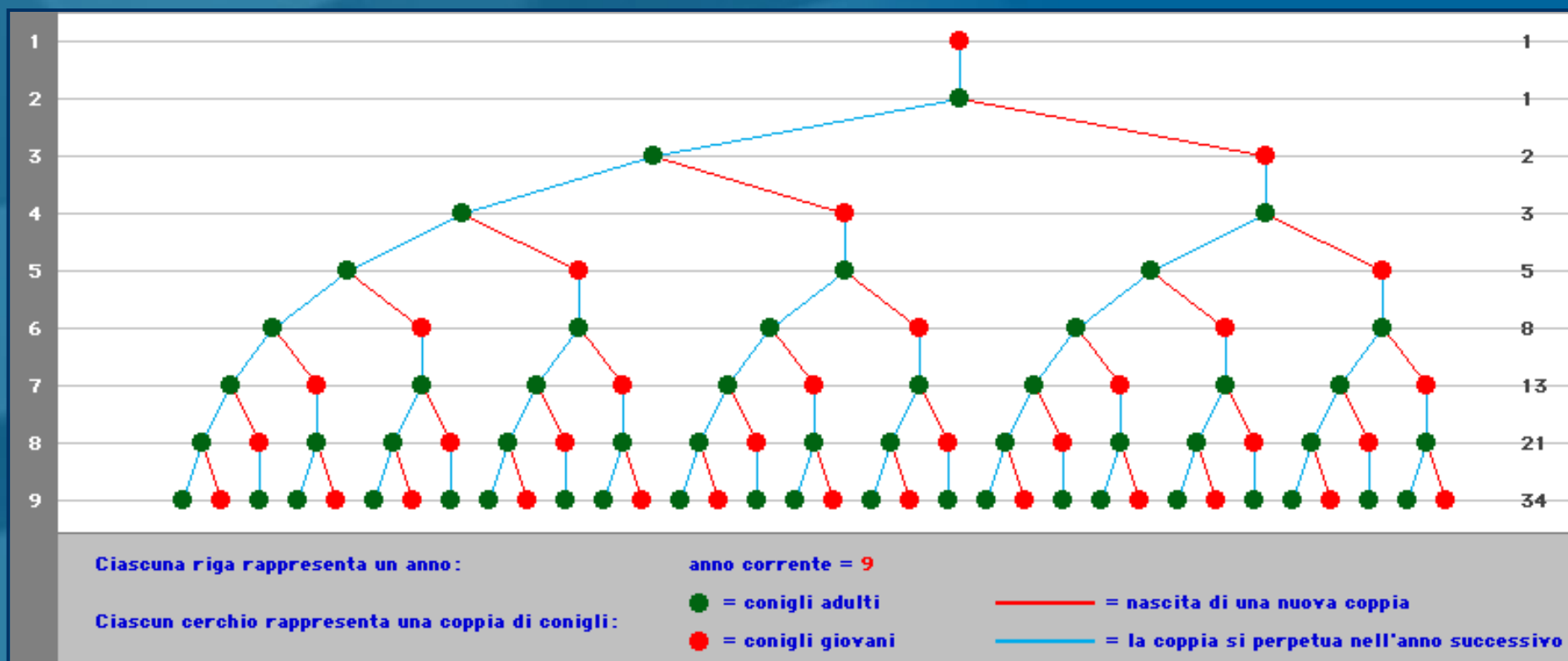
In particolare, partendo da una coppia di conigli in un'isola deserta, quante coppie si avrebbero nell'anno  $n$ ?

# Le regole di riproduzione

- Una coppia di conigli concepisce due coniglietti di **sexso diverso** ogni anno, i quali formeranno una **nuova coppia**
- La gestazione dura **un anno**
- I conigli cominciano a riprodursi soltanto al **secondo anno** dopo la loro nascita
- I conigli sono **immortali**

# L'albero dei conigli

La riproduzione dei conigli può essere descritta in un albero come segue:



# La regola di espansione

- Nell'anno  $n$ , ci sono tutte le coppie dell'anno precedente, e una nuova coppia di conigli per ogni coppia presente due anni prima
- Indicando con  $F_n$  il numero di coppie dell'anno  $n$ , abbiamo la seguente **relazione di ricorrenza**:

$$F_n = \begin{cases} F_{n-1} + F_{n-2} & \text{se } n \geq 3 \\ 1 & \text{se } n = 1, 2 \end{cases}$$

# Il problema

Primi numeri della **sequenza di Fibonacci**:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,  
610, 987, 1597,  $F_{18}=2584, \dots$

Come calcoliamo  $F_n$ ?

# Un approccio numerico

- Possiamo usare una funzione matematica che calcoli direttamente i numeri di Fibonacci.
- Si può dimostrare che:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \phi^n - \hat{\phi}^n \right)$$

dove:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx +1.618 \\ \hat{\phi} &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618 \end{aligned}$$



# Algoritmo fibonacci1

```
algoritmo fibonacci1(intero n) → intero  
return  $\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \phi^n - \hat{\phi}^n \right)$ 
```

# Correttezza?

- Qual è l'**accuratezza** su  $\Phi$  e  $\hat{\Phi}$  per ottenere un risultato corretto?
- Ad esempio, con 3 cifre decimali:

$$\phi \approx 1.618 \text{ e } \hat{\phi} \approx -0.618$$

n	fibonacci1(n)	arrotondamento	$F_n$
3	1.99992	2	2
16	986.698	987	987
18	2583.1	2583	2584

# Algoritmo fibonacci2

Un altro approccio: utilizzare direttamente la definizione ricorsiva:

*tecnica del  
divide et impera*

```
algoritmo fibonacci2(intero n)  $\rightarrow$  intero  
  if (n $\leq$ 2) then return 1  
  else return fibonacci2(n-1) + fibonacci2(n-2)
```

Corretto?

sì!

efficiente?

# Tempo di esecuzione

- Un **modello di calcolo** rudimentale: ogni linea di codice costa un'unità di tempo
- Calcoliamo il **numero di linee di codice** mandate in esecuzione
  - misura indipendente dalla piattaforma utilizzata
- Se  $n \leq 2$ : una sola linea di codice
- Se  $n = 3$ : quattro linee di codice, due per la chiamata `fibonacci2(3)`, una per la chiamata `fibonacci2(2)` e una per la chiamata `fibonacci2(1)`

# Relazione di ricorrenza

$T(n)$  = #linee di codice eseguite (nel caso peggiore)  
dall'algoritmo su input  $n$

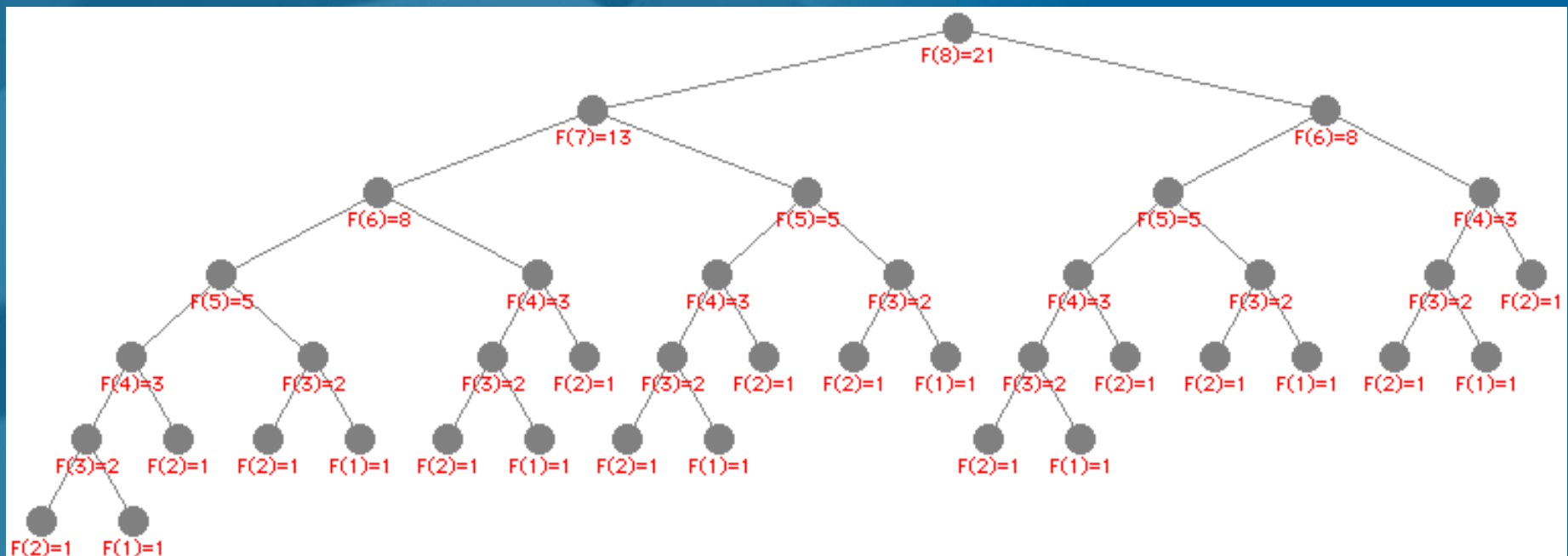
In ogni chiamata si eseguono due linee di codice,  
oltre a quelle eseguite nelle chiamate ricorsive

$$T(n) = 2 + T(n-1) + T(n-2) \quad T(1)=T(2)=1$$

In generale, il tempo richiesto da un algoritmo  
ricorsivo è pari al tempo speso all'interno della  
chiamata più il tempo speso nelle chiamate ricorsive

# Albero della ricorsione

- Utile per risolvere la relazione di ricorrenza
- Nodi corrispondenti alle chiamate ricorsive
- Figli di un nodo corrispondenti alle sottochiamate



# Calcolare $T(n)$

- Etichettando i nodi dell'albero con il numero di linee di codice eseguite nella chiamata corrispondente:
  - I nodi interni hanno etichetta 2
  - Le foglie hanno etichetta 1
- Per calcolare  $T(n)$ :
  - Contiamo il numero di foglie
  - Contiamo il numero di nodi interni

# Calcolare $T(n)$

## Lemma 1

Il numero di foglie dell'albero della ricorsione di fibonacci2 ( $n$ ) è pari a  $F_n$

**dim**

(per induzione su  $n$ )

## Lemma 2

Il numero di nodi interni di un albero in cui ogni nodo interno ha due figli è pari al numero di foglie -1

**dim**

(per induzione sul numero di nodi dell'albero  $n$ )



- In totale le linee di codice eseguite sono

$$F_n + 2(F_n - 1) = 3F_n - 2$$



# Osservazioni

fibonacci 2 è un algoritmo lento:

$$T(n) \approx F_n \approx \Phi^n$$

linee di codice eseguite

$$n = 8 \quad T(n) = 3 \cdot F_8 - 2 = 3 \cdot 21 - 2 = 61$$

$$n = 45 \quad T(n) = 3 \cdot F_{45} - 2 = 3 \cdot 1.134903.170 - 2 = 3.404.709.508$$

$n = 100 \dots$  con le attuali tecnologie, calcolare  $F_{100}$  richiederebbe circa 8000 anni!

Possiamo fare meglio?

# dim (Lemma 1)

induzione su  $n$

$n=1,2$

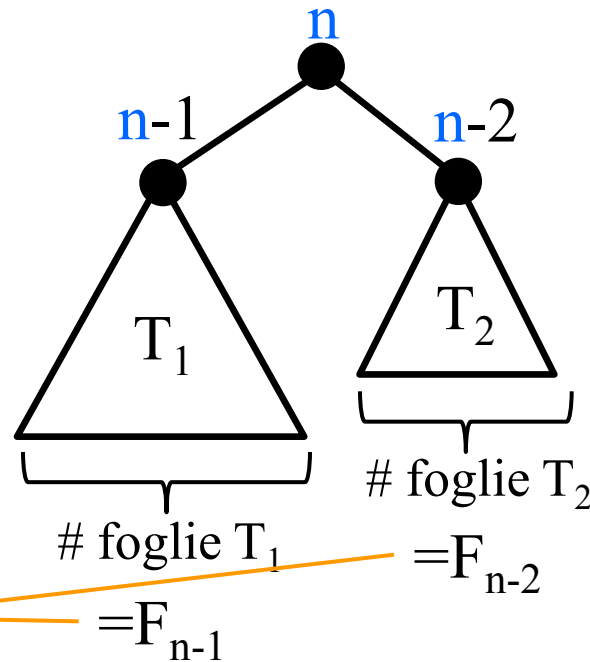
albero ricorsione



# foglie = 1 =  $F_1 = F_2$

$n > 2$

albero ricorsione  $T$



*ipotesi  
induttiva*

# foglie  $T =$   
 $F_{n-1} + F_{n-2} = F_n$



# dim (Lemma 2)

induzione su  $n$

$f = \#$  foglie

$i = \#$  nodi interni

$n \leq 2$

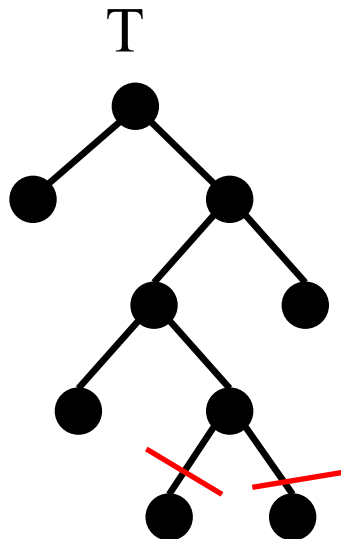
albero  $T$



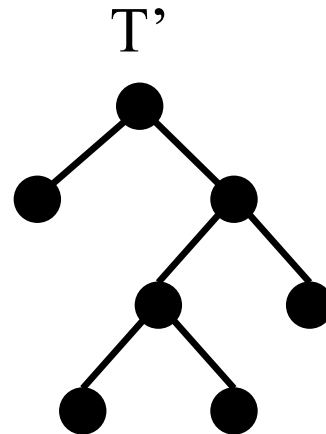
$i=0$

$f=1$

$n > 2$



coppia di foglie  
più “profonde”



$f' = \#$  foglie  $T'$

$i' = \#$  nodi interni  $T'$

per costruzione:

$i' = i - 1$

$f' = f - 1$

Per ipotesi ind:

$i' = f' - 1$

quindi:

$i - 1 = f - 1 - 1$

cioè

$i = f - 1$



# Algoritmo fibonacci3

- Perché l'algoritmo fibonacci2 è lento? Perché continua a ricalcolare ripetutamente la soluzione dello stesso sottoproblema. Perché non memorizzare allora in un **array** le soluzioni dei sottoproblemi?

**algoritmo** fibonacci3(*intero*  $n$ )  $\rightarrow$  *intero*

*sia*  $Fib$  un array di  $n$  interi

$Fib[1] \leftarrow Fib[2] \leftarrow 1$

**for**  $i = 3$  **to**  $n$  **do**

$Fib[i] \leftarrow Fib[i-1] + Fib[i-2]$

**return**  $Fib[n]$

tecnica della  
programmazione  
dinamica

Corretto?    sì!

# Calcolo del tempo di esecuzione

- Linee 1, 2, e 5 eseguite una sola volta
- Linea 3 eseguita  $\leq n$  volte
- Linea 4 eseguita  $\leq n$  volte
- $T(n)$ : numero di linee di codice mandate in esecuzione da fibonacci3

$$T(n) \leq n + n + 3 = 2n + 3$$

$$T(45) \leq 93$$

38 milioni di volte più veloce  
dell'algoritmo  
fibonacci2!

# Calcolo del tempo di esecuzione

- L'algoritmo `fibonacci3` impiega tempo **proporzionale** a  $n$  invece di **esponenziale** in  $n$  come `fibonacci2`
- Tempo effettivo richiesto da implementazioni in C dei due algoritmi su piattaforme diverse (un po' obsolete 😊):

	<code>fibonacci2(58)</code>	<code>fibonacci3(58)</code>
Pentium IV 1700MHz	15820 sec. ( $\simeq$ 4 ore)	0.7 milionesimi di secondo
Pentium III 450MHz	43518 sec. ( $\simeq$ 12 ore)	2.4 milionesimi di secondo
PowerPC G4 500MHz	58321 sec. ( $\simeq$ 16 ore)	2.8 milionesimi di secondo

# Occupazione di memoria

- Il **tempo di esecuzione** non è la sola risorsa di calcolo che ci interessa. Anche la **quantità di memoria** necessaria può essere cruciale.
- Se abbiamo un **algoritmo lento, dovremo solo attendere più a lungo** per ottenere il risultato
- Ma se un **algoritmo richiede più spazio di quello a disposizione, non otterremo mai la soluzione, indipendentemente da quanto attendiamo!**

# Algoritmo fibonacci4

- fibonacci3 usa un **array** di dimensione **n** prefissata
- In realtà non ci serve mantenere tutti i valori di  $F_n$  precedenti, ma solo gli ultimi due, riducendo lo spazio a poche variabili in tutto:

**algoritmo** fibonacci4(*intero n*) → *intero*

$a \leftarrow b \leftarrow 1$

**for**  $i = 3$  **to**  $n$  **do**

$c \leftarrow a + b$

$b \leftarrow a$

$a \leftarrow c$

**return**  $a$

$$T(n) \leq 4n + 2$$

più veloce o più lento  
di fibonacci3?



# Notazione asintotica (1 di 4)

- esprimere  $T(n)$  in modo **qualitativo**
- perdere un po' in **precisione** (senza perdere l'essenziale) ma guadagnare in **semplicità**
- di  $T(n)$  vogliamo descrivere come cresce al crescere di  $n$
- grossolanamente:
  - ignoro costanti moltiplicative
  - ignoro termini di ordine inferiore
- Esempio:
  - $T(n) = 5n + 9 = O(n)$
  - $T(n) = 6n^2 - 8n + 13 = O(n^2)$

# Notazione asintotica (2 di 4)

- **Osservazione:**

- nel nostro caso sembra che l'approssimazione che facciamo sia “sensata”

- **Infatti**

- Se andiamo a capo più spesso, aumenteranno le linee di codice sorgente, ma certo non il tempo richiesto dall'esecuzione del programma!

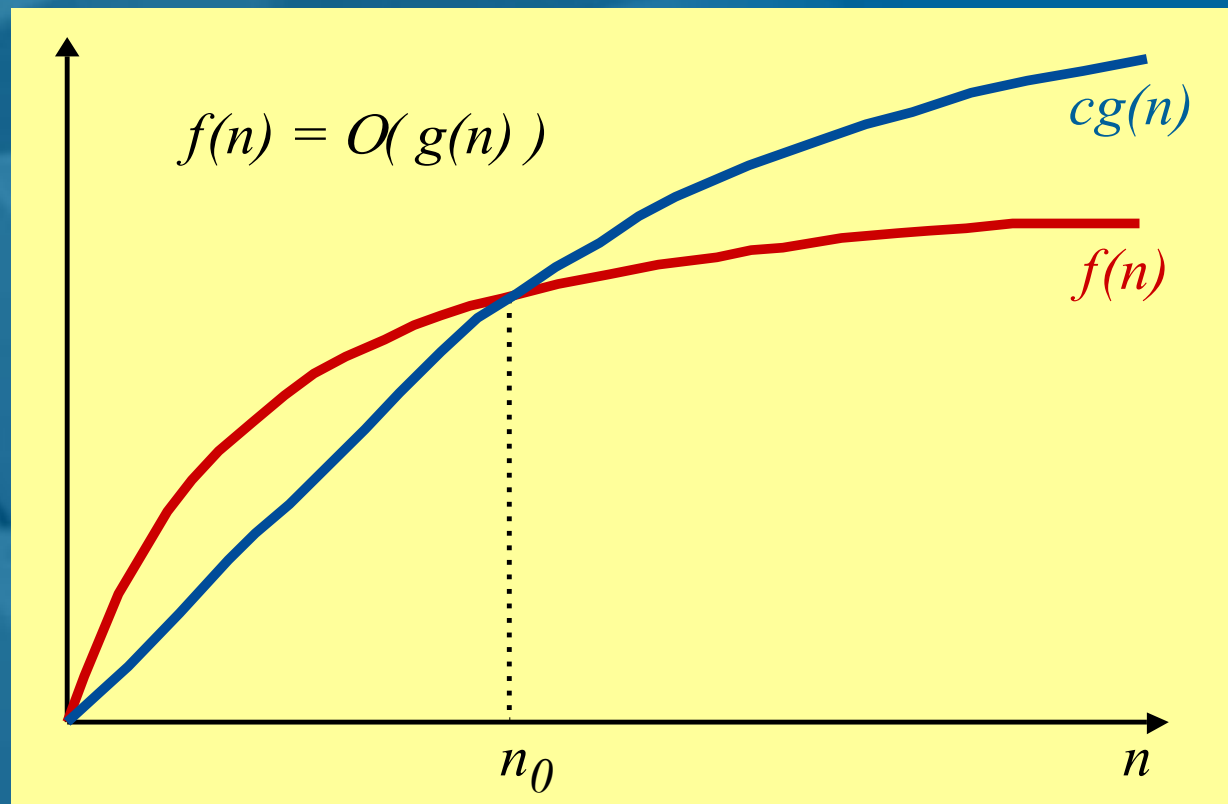
- Per lo stesso programma impaginato diversamente potremmo concludere ad esempio che  $T(n)=3n$  oppure  $T(n)=5n$

**Domanda:** ma è sensato misurare la complessità di un algoritmo contando il numero di linee di codice eseguite?

...vedremo!


# Notazione asintotica (3 di 4)

- Diremo che  $f(n) = O(g(n))$  se  $f(n) \leq c g(n)$  per qualche costante  $c$ , ed  $n$  abbastanza grande



# Notazione asintotica (4 di 4)

- Ad esempio, possiamo rimpiazzare:
  - $T(n)=3F_n$  con  $T(n)=O(F_n)$
  - $T(n)=2n$  e  $T(n)=4n$  con  $T(n)=O(n)$
  - $T(n)=F_n$  con  $T(n)=O(\phi^n)$


$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - \hat{\phi}^n)$$

$$\phi = 1.618\dots$$

$$\hat{\phi} = -0.618\dots$$

# Un nuovo algoritmo

Possiamo sperare di calcolare  $F_n$  in tempo inferiore a  $O(n)$ ?

# Potenze ricorsive

- fibonacci4 non è il miglior algoritmo possibile
- E' possibile dimostrare per induzione la seguente proprietà di matrici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

- Useremo questa proprietà per progettare un algoritmo più efficiente

# ...prodotto di matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

$$i=1, \dots, n$$

$$j=1, \dots, n$$

**Lemma:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

**dim**

Per induzione su  $n$

Fissiamo per convenzione  $F_0=0$  (notare che  $F_2=F_1+F_0$ )

**Caso base,  $n=1$ :**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$$



**Lemma:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

dim

per ipotesi induttiva

**Caso induttivo,  $n > 1$ :**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} & F_n \\ F_{n-1} + F_{n-2} & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



# Algoritmo fibonacci5

**algoritmo fibonacci5**(*intero n*)  $\rightarrow$  *intero*

1.  $M \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. **for**  $i = 1$  **to**  $n - 1$  **do**
3.  $M \leftarrow M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. **return**  $M[0][0]$

- Il tempo di esecuzione è ancora  $O(n)$
- Cosa abbiamo guadagnato?

# Calcolo di potenze

- Possiamo **calcolare la n-esima potenza elevando al quadrato la  $\lfloor n/2 \rfloor$ -esima potenza**
- Se n è dispari eseguiamo una ulteriore moltiplicazione

- Esempio:

$$3^2=9 \quad 3^4=(9)^2=81 \quad 3^8=(81)^2=6561$$

⇒ Ho eseguito solo 3 **prodotti** invece di 7

$$3^8=3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3$$

# Algoritmo fibonacci6

**algoritmo** fibonacci6(*intero*  $n$ )  $\rightarrow$  *intero*

1.  $A \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2.  $M \leftarrow \text{potenzaDiMatrice}(A, n - 1)$
3. **return**  $M[0][0]$

**funzione** potenzaDiMatrice(*matrice*  $A$ , *intero*  $k$ )  $\rightarrow$  *matrice*

4. **if** ( $k \leq 1$ ) **then**  $M \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. **else**  $M \leftarrow \text{potenzaDiMatrice}(A, \lfloor k/2 \rfloor)$
6.  $M \leftarrow M \cdot M$
7. **if** ( $k$  è dispari) **then**  $M \leftarrow M \cdot A$
8. **return**  $M$

# Tempo di esecuzione

- Tutto il tempo è speso nella procedura potenzaDiMatrice
  - All'interno della procedura si spende tempo costante
  - Si esegue una chiamata ricorsiva con input  $\lfloor n/2 \rfloor$
- L'equazione di ricorrenza è pertanto:

$$T(n) \leq T(\lfloor n/2 \rfloor) + c \quad (c: \text{costante})$$

# Metodo dell'iterazione

Risulta:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq c + T(\lfloor n/2 \rfloor) \\ &\leq 2c + T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &\leq 3c + T(\lfloor n/8 \rfloor) \\ &\vdots \\ &\leq ic + T(\lfloor n/2^i \rfloor) \end{aligned}$$

Per  $i = \lfloor \log_2 n \rfloor$  si ottiene

$$T(n) \leq c \lfloor \log_2 n \rfloor + T(1) = O(\log_2 n)$$

fibonacci6

è quindi  
esponenzialmente  
più veloce di  
fibonacci3!

# Due parole sulla complessità spaziale: quanta memoria usa un algoritmo?

**Algoritmo non ricorsivo:** dipende dalla memoria (ausiliaria) allocata; es. variabili, array, matrici, strutture dati, ecc.

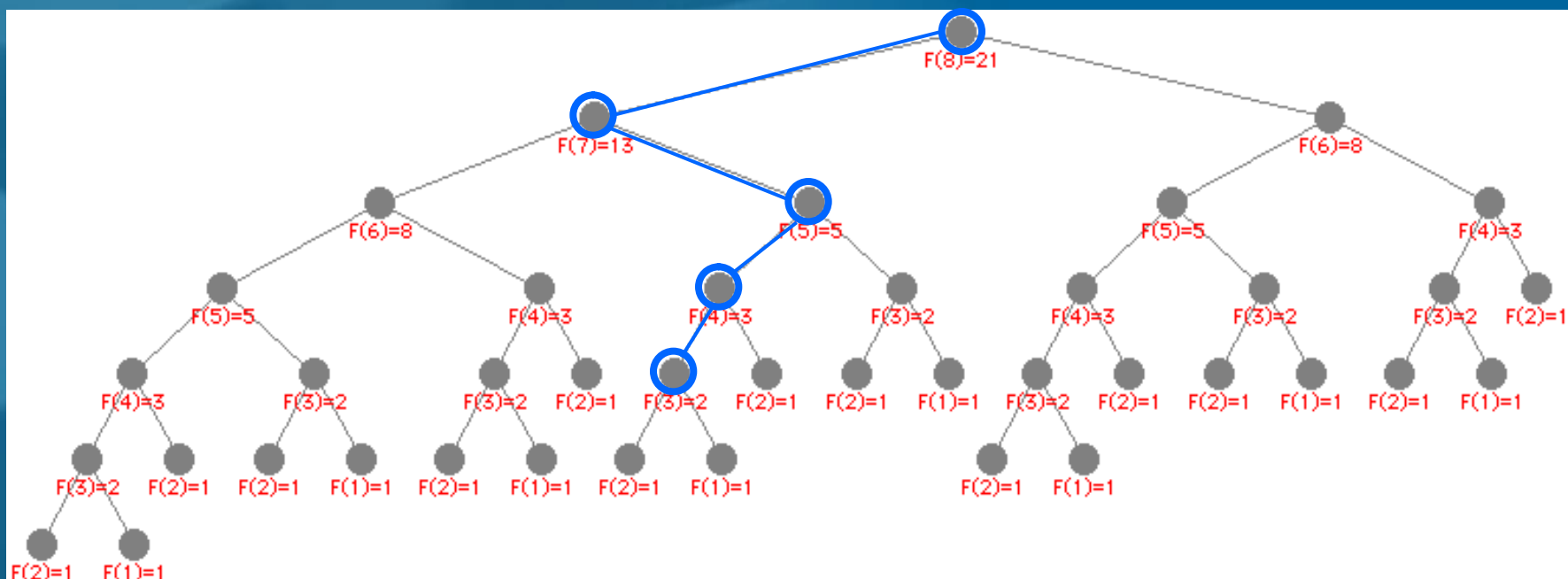
**Algoritmo ricorsivo:** dipende dalla memoria (ausiliaria) allocata da ogni chiamata e dal numero di chiamate che sono contemporaneamente attive.

**Nota:** un chiamata usa sempre almeno memoria costante (anche se non utilizza variabili ausiliarie)

Analizzare l'**albero della ricorsione** aiuta a capire le chiamate che possono essere attive nello stesso momento.

# Analisi memoria ausiliaria Fibonacci 2

- chiamate attive formano un cammino **P** radice-nodo
- **P** ha al più **n** nodi
- ogni nodo/chiamata usa memoria costante



spazio  $O(n)$



# Analisi memoria ausiliaria Fibonacci



albero delle chiamate ricorsive

altezza  $O(\log n)$

ogni nodo/chiamata usa memoria  
costante

**spazio  $O(\log n)$**

# Riepilogo

	Tempo di esecuzione	Occupazione di memoria
fibonacci2	$O(\phi^n)$	$O(n)$
fibonacci3	$O(n)$	$O(n)$
fibonacci4	$O(n)$	$O(1)$
fibonacci5	$O(n)$	$O(1)$
fibonacci6	$O(\log_2 n)$	$O(\log_2 n)$