

# Algoritmi e Strutture Dati con Laboratorio (modulo I)

Testo della prova scritta del 25 settembre 2012

docente: Luciano Gualà

Cognome:..... Nome:..... Matr.:..... Corso di Laurea:.....

## Esercizio 1 [10 punti]

- (a) Si ordinino le seguenti funzioni in ordine non decrescente di tasso di crescita asintotica. Per ogni coppia di funzioni  $f_i(n), f_{i+1}(n)$  adiacenti nell'ordinamento si specifichi se  $f_i(n) = \Theta(f_{i+1}(n))$  o se  $f_i(n) = o(f_{i+1}(n))$ .

Le funzioni sono:  $2^{\frac{n}{2}}$ ,  $\frac{n^2(n+1)}{\sqrt[4]{n^4-1}}$ ,  $\sqrt[3]{n^6 + \log n}$ ,  $2^n$ ,  $n^2 \sqrt[3]{\log n}$ ,  $\frac{n^2 \log n - 4n}{7}$ ,  $\frac{n^{2.01}}{\log^{22} n}$ ,  $\sqrt{2^n}$ ,  $3n^2 \log \log n$ .

- (b) Per un problema sono noti due algoritmi ricorsivi,  $A_1$  e  $A_2$  le cui complessità temporali sono descritte dalle seguenti equazioni di ricorrenza:

$$T_1(n) = 2T_1(n-1) + 1, T_1(1) = 1;$$

$$T_2(n) = 16T_2(n/2) + n^4 + \sqrt[3]{n^4 \log^2 n}, T_2(1) = 1;$$

Dire, motivando la risposta, quale algoritmo è preferibile usare.

**Esercizio 2 [10 punti]** L'elemento *mediano* di un insieme  $S$  di  $m$  elementi (distinti) è quell'elemento che ha esattamente  $\lfloor m/2 \rfloor$  elementi minori in  $S$ . Per esempio, l'insieme  $S = \{1, 4, 6, 8, 9, 12\}$  ha mediano 8. Siano dati due insiemi  $A$  e  $B$  di  $n$  elementi ciascuno, rappresentati come sequenze ordinate memorizzate negli array  $S_A[1:n]$  e  $S_B[1:n]$ . Progettare un algoritmo che trovi il mediano di  $A \cup B$  in tempo  $O(n)$  e che usi memoria ausiliaria  $O(1)$ . Si fornisca lo pseudocodice dettagliato dell'algoritmo.

**Esercizio 3 [15 punti]** Il signor Marche sta pianificando i suoi  $n$  giorni di vacanza fra Roma e Firenze. Avendo a disposizione un budget limitato, vuole trovare un piano che gli faccia spendere il meno possibile. Ha raccolto i seguenti dati. Passare il giorno  $i$ -esimo a Roma gli costerebbe  $r_i$  euro, mentre a Firenze spenderebbe  $f_i$  euro. Ogni giorno può decidere se restare nella città in cui è o spostarsi nell'altra. Spostarsi di città, però, ha un costo fisso di  $\alpha$  euro. Inoltre, dopo aver controllato i costi dei voli, si è accorto che arrivare/partire a/dal Roma o Firenze è indifferente. Più formalmente, un piano è una sequenza  $x = x_1 x_2 \dots x_n$ , dove per ogni  $i = 1, \dots, n$ ,  $x_i \in \{R, F\}$  specifica se il signor Marche passa il giorno  $i$ -esimo a Roma (R) o Firenze (F). Il costo di un piano  $x$  è dato dalla somma dei costi giornalieri più gli eventuali spostamenti, ovvero  $\sum_{i=1}^n c(x_i) + \sum_{i=2}^n s_i(x)$ , dove  $c(x_i) = r_i$  se  $x_i = R$ , altrimenti (se  $x_i = F$ )  $c(x_i) = f_i$ , mentre  $s_i(x) = \alpha$  se  $x_{i-1} \neq x_i$ , 0 altrimenti.

- (a) Mostrare che il seguente algoritmo non produce (sempre) un piano ottimo: per ogni  $i = 1, \dots, n$ , imposta  $x_i = R$  se  $r_i \leq f_i$ , e  $x_i = F$  altrimenti.
- (b) Progettare un algoritmo con complessità temporale polinomiale che, dati  $\alpha, r_i, f_i$ , per ogni  $i = 1, \dots, n$ , calcoli il costo di un piano di costo minimo.