

Elementi di Algoritmi e Strutture Dati
Testo della prova scritta del 22 luglio 2008
docente: Luciano Gualà

Cognome:..... Nome:..... Matr.:..... Corso di Laurea:.....

Esercizio 1 [8 punti] Siano $f_1(n), f_2(n), g_1(n), g_2(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ quattro funzioni. Dimostrare o confutare la seguente relazione

$$\max\{f_1(n), f_2(n)\} = \Theta(g_1(n) + g_2(n))$$

quando

(a) $f_1(n) = \Theta(g_1(n))$ e $f_2(n) = \Theta(g_2(n))$.

(b) $f_1(n) = \omega(g_1(n))$ e $f_2(n) = o(g_1(n))$ e $g_2(n) = \omega(f_2(n))$.

Esercizio 2 [8 punti] Sia A una matrice $m \times n$ nella quale gli elementi di ogni riga sono ordinati (in ordine crescente) da sinistra verso destra e gli elementi di ogni colonna sono ordinati (in ordine crescente) dall'alto verso il basso. Un esempio per $m = 4$ e $n = 3$ è il seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 20 \\ 5 & 14 & 22 \\ 8 & 21 & 25 \\ 15 & 23 & 30 \end{pmatrix}$$

Realizzare un algoritmo che, preso in input una tale matrice A e un valore x , verifichi in tempo $o(nm)$ se x è presente in A o meno. Si studi la complessità dell'algoritmo anche quando $m = \Theta(n)$. *Attenzione:* l'esercizio sarà valutato solo se corredato da adeguata descrizione del funzionamento dell'algoritmo, in base ai seguenti parametri: correttezza, efficienza e analisi di complessità.

Esercizio 3 [8 punti]

(a) A partire da un albero AVL vuoto, si mostrino le modifiche apportate all'albero in seguito ai seguenti inserimenti: 20, 10, 15, 30, 40, 25. Si cancelli poi il nodo con chiave 20.

(b) Si risolva la seguente equazione di ricorrenza: $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$, $T(1) = 1$.

Esercizio 4 [8 punti] Si descriva in modo sintetico e preciso l'algoritmo Fibonacci6 che, preso in input un intero n , calcola l' n -esimo numero di Fibonacci in tempo $O(\log n)$. Si analizzi in particolare la sua correttezza e si derivi la sua complessità temporale.